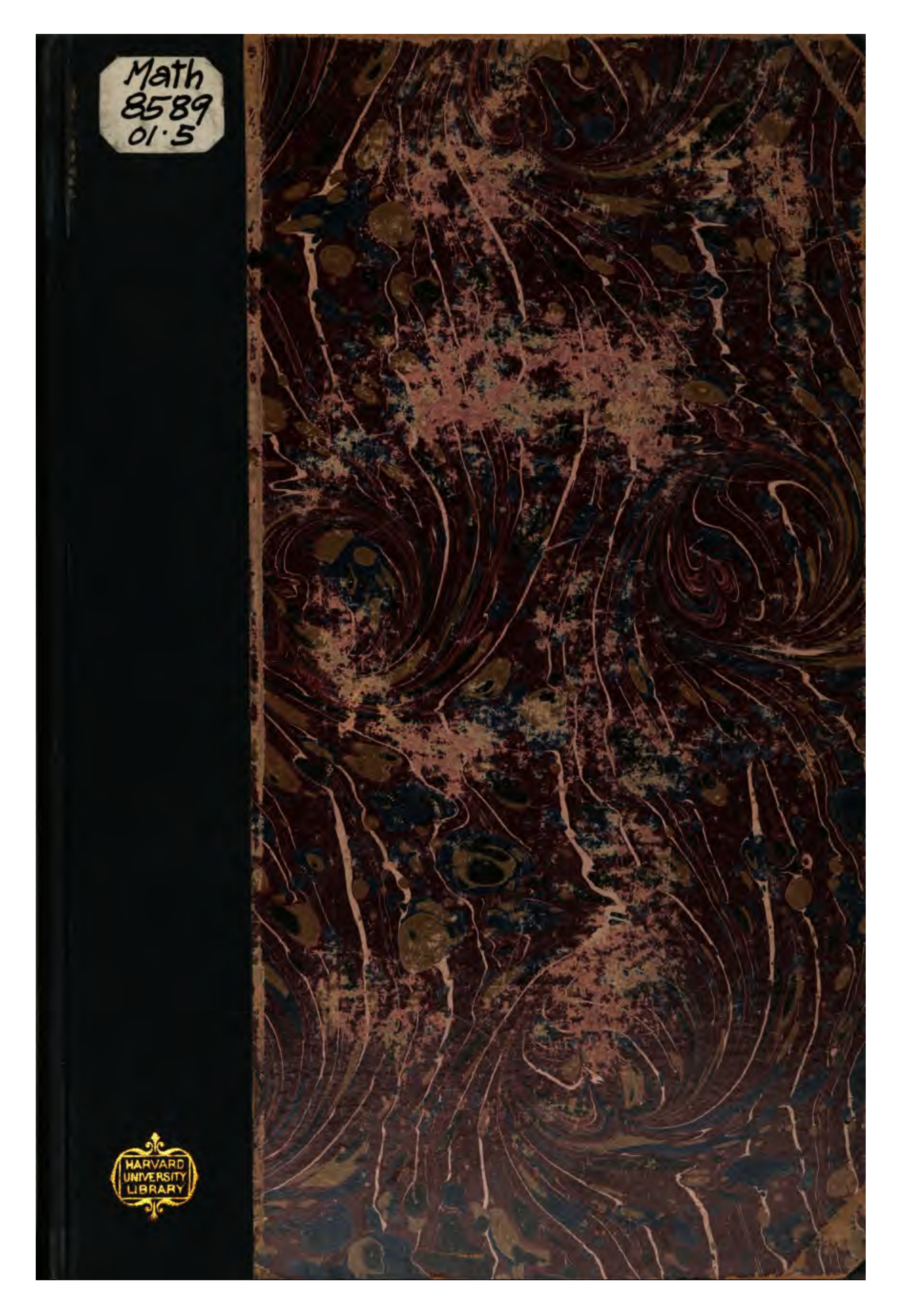



Math
8589
01·5
HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY




SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE

DIE COMPLEMENTÄRFLÄCHEN DER PSEUDOSPHÄRISCHEN ROTATIONSFLÄCHEN UND IHR ZUSAMMENHANG MIT ALLGEMEINEREN PSEUDOSPHÄRISCHEN FLÄCHEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

WELCHE MIT GENEHMIGUNG

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG

ZUGLEICH MIT DEN ANGEHÄNGTEN THESEN

AM DONNERSTAG, DEN 1. AUGUST 1901, VORMITTAGS 11 H.,

ÖFFENTLICH VERTHEIDIGEN WIRD

GEORG BOLKE

AUS NEUSTETTIN.

MIT EINER LITHOGRAPHIRTEN TAFEL.

OPPONENTEN:

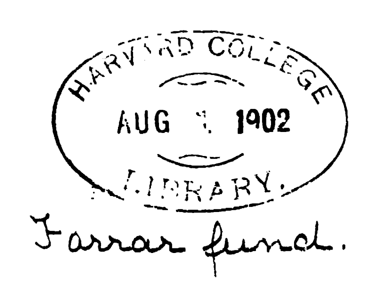
HERR DR. PHIL. HUGO SCHULTZE.

HERR CAND. MATH. FRITZ RIEDEL.

HALLE A. S.

1901.





DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

MEINER MUTTER

GEWIDMET.



Einleitung.

Die Bestimmung specieller Flächen vom konstanten negativen Krümmungsmass $-\frac{1}{R^2}$ kommt auf die Lösung einer Differentialgleichung 2ter Ordnung hinaus, und zwar lautet dieselbe, wenn uv die Parameter der Krümmungslinien sind,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{1}{R^2} \sin w \cos w,$$

oder wenn pq die Parameter der Asymptotenlinien sind,

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial p \, \partial q} = \frac{1}{R^2} \sin 2w,$$

wo $2w$ den Winkel der Asymptotenlinien bedeutet. Einer Lösung $w = fu$ entsprechen die Rotationsflächen, einer Lösung $w = f(u \cos \alpha + v \sin \alpha)$ die Schraubenflächen. In den „Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1868" hat Enneper die Flächen constanten Krümmungsmasses, welche eine Schar ebener und diejenigen, welche eine Schar sphärischer Krümmungslinien besitzen, näher untersucht; die ersteren entsprechen einer Lösung $\operatorname{tg} \frac{w}{2} = U \cdot V$, wo U allein Funktion von u, V allein Funktion von v ist.

Einen neuen Gesichtspunkt führt Bianchi[1]) in die Theorie der pseudosphärischen Flächen ein, indem er eine (bekannte) pseudosphärische Fläche als den einen Mantel der Evolutenfläche einer Weingartenschen Fläche auffasst und nach dem zweiten Mantel, der sog. Complementär- oder Ergänzungsfläche der ersten, fragt; in dem Falle, dass für die Evolventenfläche die Beziehung $r_1 - r_2 = R$ ($r_1 r_2$ Hauptkrümmungshalbmesser) besteht, ist die Complementärfläche ebenfalls pseudosphärisch.

1) Math. Annalen Bd. XVI, Vorlesungen über Differentialgeometrie Kap. IX.

Dieses Resultat lässt eine Erweiterung mit Hilfe der Theorie der Strahlencongruenzen[1]) zu; man betrachtet die erste Fläche als den einen Brennflächenmantel eines pseudosphärischen Strahlensystems[2]) und sucht den zweiten Brennflächenmantel, welcher ebenfalls eine pseudosphärische Fläche ist, zu bestimmen. Diese Aufgabe, welche auf eine totale Differentialgleichung 1ter Ordnung führt, hat Bianchi für die specielle Annahme durchgeführt, dass die erste pseudosphärische Fläche sich auf die Z-Axe zusammenzieht[3]); auf diese Weise bestimmt er die Complementärfläche der Pseudosphäre.

In der vorliegenden Arbeit wird, nach einer weiteren Ausführung der soeben erwähnten Bianchischen Ergebnisse, die Differentialgleichung aufgestellt, von welcher die Bestimmung des zweiten Brennflächenmantels abhängt, wenn der erste Mantel eine pseudosphärische Rotationsfläche ist; dieselbe ist, wenn es sich um Complementärflächen handelt, durch Quadraturen lösbar.

Die Complementärfläche der Pseudosphäre ist ja bereits bekannt; es werden aber auf diesem Wege auch die Complementärflächen der beiden andern Rotationsflächen gewonnen; dieselben sollen ferner genau discutiert, und da sie sich als specielle Fälle der Enneperschen Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien ergeben, mit diesen in Beziehung gebracht werden. Im Anhang endlich ist eine Erweiterung der Ergebnisse kurz angedeutet.

I. Pseudosphärische Flächen im allgemeinen; der Satz von Bianchi; Pseudosphärische Strahlensysteme.

Da alle Flächen von demselben konstanten Krümmungsmass $-\frac{1}{R^2}$ auf einander und auf eine gewisse Rotationsfläche abwickelbar sind, so lassen sie sich nach der Umkehrung des

1) Kummer, Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme (Crelles Journal Bd. 57). Bianchi, Diff.-Geom. Kap. X.

2) Bianchi, Diff.-Geom. S. 282 f., S. 451 f.

3) Dieser Fall entspricht der particulären Lösung $w = 0$ der charakteristischen Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{1}{R^2} \sin w \cos w$.

Weingartenschen Satzes als Evoluten von W-Flächen auffassen. Bildet man das Linienelement einer beliebigen pseudosphärischen Fläche in orthogonal-geodätischen Koordinaten, so lässt sich zeigen[1]), dass man dasselbe auf eine der drei charakteristischen Formen

$$\text{I.}\quad ds^2 = du^2 + \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{R}} + e^{-\frac{u}{R}}\right)^2 dv^2 = du^2 + \cos h^2 \frac{u}{R}\, dv^2,$$

hyperbolischer Typus

$$\text{II.}\quad ds^2 = du^2 + \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{R}} - e^{-\frac{u}{R}}\right)^2 dv^2 = du^2 + \sin h^2 \frac{u}{R}\, dv^2,$$

elliptischer Typus

$$\text{III.}\quad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}\, dv^2, \qquad \text{parabolischer Typus}$$

bringen kann, je nachdem nämlich die geodätischen Linien sich in einem imaginären, reellen und im Endlichen gelegenen, oder unendlich fernen Punkte schneiden. Jeder dieser drei Formen entspricht eine pseudosphärische Rotationsfläche von demselben Typus. Wie aus den Formeln I, II, III folgt, ist es möglich, eine beliebige pseudosphärische Fläche so auf eine Rotationsfläche abzuwickeln, dass eine beliebig gewählte Schar von geodätischen Linien auf der ersten Fläche den Meridiankurven der Rotationsfläche entspricht. Da die Parallelkreise constante geodätische Krümmung besitzen, so muss dasselbe für die zu den geodätischen Linien orthogonalen Kurven gelten, und zwar ist die geodätische Krümmung $<, >, = \frac{1}{R}$ je nachdem das Linienelement die Form I, II, III besitzt. Aus dieser letzten Bemerkung ergiebt sich der Satz, dass, wenn eine pseudosphärische Fläche so auf eine Rotationsfläche abgewickelt werden soll, dass eine gewisse Schar von geodätischen Linien in die Meridiankurven übergeht, diese Abwickelung nur auf eine der drei Arten möglich ist[2]).

Wir betrachten jetzt eine pseudosphärische Fläche, deren Linienelement eine der drei typischen Formen I, II, III hat, als den einen Mantel der Evolutenfläche einer W-Fläche und

---

1) Bianchi, Diff.-Geom. S. 189.

2) Darboux, Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces Bd. III, S. 388 f.

fragen nach den Beziehungen der Hauptkrümmungshalbmesser der Evolventenfläche und dem Linienelement des zweiten Mantels.

Die Linienelemente der beiden Mäntel der Evolutenfläche einer W-Fläche kann man allgemein in der Form

$$ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2\int\frac{dr_1}{r_1 - r_2}} du^2, \qquad ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2\int\frac{dr_2}{r_2 - r_1}} dv^2$$

schreiben[1]), wo uv die Parameter der Krümmungslinien, $r_1 r_2$ die Hauptkrümmungshalbmesser der W-Flächen sind. Aus diesen Formeln folgt sogleich, dass je nachdem das Linienelement der pseudosphärischen Flächen die Form I, II, III hat, zwischen den Hauptkrümmungshalbmessern der Evolventenfläche die Beziehungen:

$$\text{I.} \quad r_1 - r_2 = R \cot h \frac{r_1 + C}{R}$$

$$\text{II.} \quad r_1 - r_2 = R \operatorname{tg} h \frac{r_1 + C}{R}$$

$$\text{III.} \quad r_1 - r_2 = R$$

bestehen und das Linienelement des zweiten Mantels sich resp. auf die Form

$$\text{I.} \quad ds_2^2 = dr_1^2 \cot h^4 \frac{r_1 + C}{R} + \frac{dv^2}{\sin h^2 \frac{r_1 + C}{R}}$$

$$\text{II.} \quad ds_2^2 = dr_1^2 \operatorname{tg} h^4 \frac{r_1 + C}{R} + \frac{dv^2}{\cos h^2 \frac{r_1 + C}{R}}$$

$$\text{III.} \quad ds_2^2 = dr_1^2 + e^{-\frac{2 r_1}{R}} dv^2$$

bringen lässt[2]).

Diese Formeln enthalten den Satz von Bianchi: Die Complementärflächen einer pseudosphärischen Fläche sind, je nach der Wahl der geodätischen Linien, in Bezug auf welche die zweite Fläche die Complementärfläche der ersten ist, auf die Rotationsflächen der verkürzten, verlängerten, gewöhnlichen Tractrix abwickelbar.

---

1) Bianchi, Diff.-Geom. S. 247.

2) Bianchi, Diff.-Geom. S. 254.

In dem Falle also, dass die geodätischen Linien parallel laufen, besitzt die Complementärfläche dasselbe constante negative Krümmungsmass $-\frac{1}{R^2}\cdot$ Es ergiebt sich in diesem Falle eine sehr einfache Konstruktion der Complementärfläche[1]): man braucht auf den Tangenten der geodätischen Linien nur die constante Strecke R vom Berührungspunkt aus abzutragen, dann bilden die Endpunkte dieser Strecken die Complementärfläche. Die zu den geodätischen Linien orthogonalen Kurven sind Grenzkreise, d.h. besitzen die constante geodätische Krümmung $\frac{1}{R}\cdot$ Aus der allgemeinen Theorie der W-Flächen weiss man, dass sich auf den beiden Mänteln der Evolutenfläche die Asymptotenlinien entsprechen[2]); in dem speciellen Falle, dass für die W-Flächen die Beziehung $r_1 - r_2 = R$ gilt, entsprechen sich auch die Krümmungslinien[3]).

Das letzte Resultat lässt eine Verallgemeinerung durch die Theorie der Strahlencongruenzen zu. Bekanntlich versteht man unter einem Strahlensystem die „Systeme von doppelt unendlich vielen Geraden, die so im Raume verteilt sind, dass durch jeden Punkt des Raumes oder eines gewissen Raumgebietes eine Gerade oder eine endliche Anzahl von Geraden des Systems hindurchgeht“ und betrachtet in Verbindung mit einem solchen folgende fünf Flächen: 1) die beiden Grenzflächen oder den Ort der Grenzpunkte, wo man unter den „Grenzpunkten“ eines Strahles diejenigen „Fusspunkte der kleinsten Entfernungen“ zwischen diesem Strahl und allen unendlich benachbarten versteht, zwischen welche alle übrigen „Fusspunkte der kleinsten Entfernungen“ fallen; 2) die beiden Brennflächen oder den Ort der (reellen oder imaginären) Brennpunkte, wo man unter „Brennpunkten“ diejenigen Punkte des Strahles versteht, in welchen derselbe von zwei consecutiven Strahlen geschnitten wird; 3) die Mittelfläche, d. h. den Ort der gemeinschaftlichen Mittelpunkte zwischen den Grenz- und Brennpunkten. Im Falle, dass die Grenz- und Brennpunkte zu-

---

1) Bianchi, Diff.-Geom. S. 247 f. — Math. Ann. Bd. XVI.
2) Bianchi, Diff.-Geom. S. 241 f.
3) Bianchi, Diff.-Geom. S. 243 f.

sammenfallen, geht das Strahlensystem in das Normalensystem einer (und damit unendlich vieler paralleler) Fläche über.

Unter pseudosphärischen Strahlensystemen versteht man solche, deren Brennflächenmäntel pseudosphärische Flächen sind; auf diesen entsprechen sich die Krümmungs- und Asymptotenlinien; die pseudosphärischen Strahlensysteme sind dadurch charakterisiert, dass sowohl die Entfernung der Grenzpunkte R, als auch die Entfernung der Brennpunkte $R\cos\sigma$ constant ist[1]).

Wir nehmen nun den ersten Brennflächenmantel als eine bekannte pseudophärische Fläche an und suchen den zweiten Mantel zu bestimmen. Bevor wir jedoch dazu übergehen, wollen wir zunächst ganz allgemeine für pseudosphärische Flächen giltige Formeln aufstellen, wenn dieselben auf ihre Krümmungslinien u, v als Koordinatenlinien bezogen sind.

Das Linienelement einer W-Fläche bezogen auf ihre Krümmungslinien als Koordinatenlinien lautet, wie aus den ersten beiden sog. Fundamentalgleichungen folgt[2]):

$$ds^2 = r_1^2 e^{2\int\frac{dr_1}{r_2-r_1}} du^2 + r_2^2 e^{2\int\frac{dr_2}{r_1-r_2}} dv^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Da $r_1 r_2 = -R^2$ ist, so folgt

$$E = \frac{r_1^2}{r_1^2+R^2}, \quad G = \frac{r_2^2}{r_2^2+R^2} = \frac{R^2}{r_1^2+R^2};$$

da $E + G = 1$ ist, führen wir eine neue Variable w ein durch die Gleichung:

$$(1) \qquad E = \cos^2 w, \qquad G = \sin^2 w.$$

Bezeichnen wir jetzt mit $D\,D'\,D''$ die Fundamentalgrössen 2ter Ordnung, mit $r_1\,r_2$ die Hauptkrümmungshalbmesser der pseudosphärischen Fläche, so folgt:

$$(2) \qquad r_1 = R\cot w, \qquad r_2 = -R\operatorname{tg} w,$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} D &= \frac{E}{r_1} = \frac{1}{r_1-r_2} = \frac{1}{R}\sin w\cos w, \\ D'' &= \frac{G}{r_2} = -\frac{1}{r_1-r_2} = -\frac{1}{R}\sin w\cos w, \qquad D' = 0. \end{aligned}$$

---

1) Bianchi, Diff.-Geom. S. 282.

2) Bianchi, Diff.-Geom. S. 250. — Knoblauch, Einleitung in die Theorie der krummen Flächen, S. 225.

Die dritte Fundamentalgleichung, die sog. Gauss'sche Relation, giebt für w folgende charakteristische Gleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{1}{R^2} \cdot \sin w \cos w\,. \tag{4}$$

$2w$ ist der Winkel der Asymptotenlinien.

Die sog. Christoffel'schen Symbole [1])

$$\left\{ {11 \atop 1} \right\} = J_1, \quad \left\{ {11 \atop 2} \right\} = J_2, \quad \left\{ {12 \atop 1} \right\} = J_1', \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\} = J_2', \quad \left\{ {22 \atop 1} \right\} = J_1'', \quad \left\{ {22 \atop 2} \right\} = J_2''$$

lauten für unsere Gleichungen:

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{\sin w}{\cos w}\frac{\partial w}{\partial u}, & J_2 &= \frac{\cos w}{\sin w}\frac{\partial w}{\partial v}, & J_1' &= -\frac{\sin w}{\cos w}\frac{\partial w}{\partial v}, \\ J_2' &= \frac{\cos w}{\sin w}\frac{\partial w}{\partial u}, & J_1'' &= -\frac{\sin w}{\cos w}\frac{\partial w}{\partial u}, & J_2'' &= \frac{\cos w}{\sin w}\frac{\partial w}{\partial v}. \end{aligned} \tag{5}$$

Es mögen mit XYZ, $X'Y'Z'$, $X''Y''Z''$ die Richtungscosinus der Flächennormale, der Krümmungslinien v und u bezeichnet werden, dann ergiebt sich:

$$X' = \frac{1}{\cos w}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad X'' = \frac{1}{\sin w}\frac{\partial x}{\partial u} \text{ oder } \frac{\partial x}{\partial u} = \cos w X', \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sin w X''; \tag{6}$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{\sin w}{R} X', \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\cos w}{R} X''. \tag{7}$$ [2])

Wegen der allgemein für die Cartesischen Koordinaten einer Fläche geltenden Gleichungen [3]) folgt:

---

1) Bianchi, Diff.-Geom. Kap. II. Knoblauch bezeichnet die Christoffelschen Symbole mit $J_1 J_2 \cdots$, s. Flächentheorie § 28.

2) Knoblauch S. 116 Form. 2.

3) Die betreffenden Gleichungen lauten (Knobl. Fl.-Th. S. 78).

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = DX + J_1\frac{\partial x}{\partial u} + J_2\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = D'X + J_1'\frac{\partial x}{\partial u} + J_2'\frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = D''X + J_1''\frac{\partial x}{\partial u} + J_2''\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Da $D' = 0$ für Krümmungslinien ist, und für pseudosphärische Flächen $J_1 = J_1''$, $J_2 = J_2''$, so gelten für die Cartesischen Koordinaten der pseudosphärischen Flächen folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = J_1'\frac{\partial x}{\partial u} + J_2'\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 2J_1\frac{\partial x}{\partial u} + 2J_2\frac{\partial x}{\partial v}.$$

(8) $\frac{\partial X'}{\partial u} = \frac{\sin w}{R} X + \frac{\partial w}{\partial v} X'', \qquad \frac{\partial X'}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial u} X'',$

(9) $\frac{\partial X''}{\partial u} = -\frac{\partial w}{\partial v} X', \qquad \frac{\partial X''}{\partial v} = -\frac{\cos w}{R} X - \frac{\partial w}{\partial u} X'.$

Die Formeln (1) bis (9) gelten ganz allgemein für pseudosphärische Flächen; für den Fall, dass wir es mit Rotationsflächen zu thun haben, wird $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$ und nach (4)

(10) $$\frac{dw}{du} = +\frac{1}{R}\sqrt{\sin^2 w - c},$$

wo das positive Zeichen der Quadratwurzel gewählt ist, c eine willkürliche Constante bedeutet.

Die Cartesischen Koordinaten einer Rotationsfläche kann man schreiben:

$$x = \frac{1}{C}\sin w \cos(C_1 v), \quad y = \frac{1}{C}\sin w \sin(C_1 v), \quad z = Fu.$$

Berücksichtigt man, dass

$$E = \cos^2 w, \quad G = \sin^2 w, \quad \frac{dw}{du} = \frac{1}{R}\sqrt{\sin^2 w - c}$$

sein muss, dass ferner die allgemein für Cartesische Koordinaten geltenden Gleichungen (vgl. Anm. 3 S. 11) befriedigt sein müssen, so erhält man folgende Formeln:

$$C_1 = C, \quad C = (\pm)\frac{\sqrt{1-c}}{R};$$

von den beiden Vorzeichen muss das positive gewählt werden, damit die Gleichungen (8), (9) identisch befriedigt werden. Man erhält für Rotationsflächen also folgende Formeln:

(11) $$\begin{cases} x = \dfrac{R}{\sqrt{1-c}} \sin w \cos\left(\dfrac{\sqrt{1-c}\cdot v}{R}\right), \\ y = \dfrac{R}{\sqrt{1-c}} \sin w \sin\left(\dfrac{\sqrt{1-c}\cdot v}{R}\right), \\ z = -\displaystyle\int \dfrac{\cos^2 w\, du}{\sqrt{1-c}}. \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} X' = \dfrac{1}{\sqrt{1-c}} \cdot \sqrt{\sin^2 w - c} \cdot \cos\left(\dfrac{\sqrt{1-c}\cdot v}{R}\right), \\ Y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-c}} \cdot \sqrt{\sin^2 w - c} \cdot \sin\left(\dfrac{\sqrt{1-c}\cdot v}{R}\right), \\ Z' = -\dfrac{\cos w}{\sqrt{1-c}}. \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} X'' = -\sin\left(\dfrac{\sqrt{1-c}\cdot v}{R}\right), \\ Y'' = \cos\left(\dfrac{\sqrt{1-c}\cdot v}{R}\right), \\ Z'' = 0. \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\cos w}{\sqrt{1-c}} \cdot \cos\left(\dfrac{\sqrt{1-c}\cdot v}{R}\right), \\ Y = \dfrac{\cos w}{\sqrt{1-c}} \cdot \sin\left(\dfrac{\sqrt{1-c}\cdot v}{R}\right), \\ Z = \dfrac{1}{\sqrt{1-c}} \cdot \sqrt{\sin^2 w - c}. \end{cases}$$

Bringen wir das Linienelement $\cos^2 w du^2 + \sin^2 w dv^2$ auf die Form $du_1^2 + fu_1 dv^2$, so wird $fu_1 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{u_1}{R}} + c e^{-\frac{u_1}{R}}\right)^2$, daraus folgt: Ist $c < 0$, so haben wir es mit einer Rotationsfläche vom elliptischen, ist $c > 0$, so mit einer solchen vom hyperbolischen Typus zu thun. Aus den Gleichungen (11) folgt sodann noch: Ist $c < 0$, so darf es jeden Wert von 0 bis ∞ annehmen, ist aber $c > 0$, so muss es $\leqq 1$ sein, damit man für reelle Werte von u und v reelle Flächen erhält.

Es sei jetzt eine Fläche S als bekannt angenommen; denken wir uns auf derselben die parallelen geodätischen Linien gezeichnet und auf den Tangenten derselben vom Berührungspunkte $F(xyz)$ der Fläche S das Stück $R \cos \sigma$ abgetragen, so werden die Endpunkte dieser Strecke den zweiten Brennflächenmantel des durch die Tangenten gebildeten pseudosphärischen Strahlensystems bilden; seien die Koordinaten eines entsprechenden Punktes F_1 dieser Fläche mit $x_1 y_1 z_1$ bezeichnet, so wird:

$$x_1 = x + R \cos\sigma \cos(RX),$$
$$y_1 = y + R \cos\sigma \cos(RY),$$
$$z_1 = z + R \cos\sigma \cos(RZ),$$

wo $\cos RX$, $\cos RY$, $\cos RZ$ die Richtungscosinus der Verbindungslinie FF_1 zweier entsprechender Punkte sind.

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Verbindungslinie FF_1 oder die Richtung der durch diesen Punkt gehenden geodätischen Linie der Schar mit der Richtung der Krümmungslinie v auf S bildet, mit w_1, dann ergiebt sich der Wert von $\cos(RX) \cdots$ mit Hilfe der Formeln der sphärischen Trigonometrie und man erhält:

$$(15)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x + R\cos\sigma\,(X'\cos w_1 + X''\sin w_1),\\ y_1 &= y + R\cos\sigma\,(Y'\cos w_1 + Y''\sin w_1),\\ z_1 &= z + R\cos\sigma\,(Z'\cos w_1 + Z''\sin w_1). \end{aligned}$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Fläche S_1 der zweite Brennflächenmantel zu S und selbst pseudosphärisch ist, wird, da nach S. 9 die Kurven u, v auf S_1 auch Krümmungslinien darstellen, durch die Gleichungen:

$$(16)\qquad (x_1 - x)\,X_1 + (y_1 - y)\,Y_1 + (z_1 - z)\,Z_1 = 0\ [1],$$

$$(17\text{a})\qquad E_1 + G_1 = 1 \quad \text{und}$$

$$(17\text{b})\qquad F_1 = 0$$

ausgedrückt.

Mit Hilfe der Formeln (6) (9) erhalten wir für $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, $\frac{\partial x_1}{\partial v}$ die Ausdrücke:

$$(17)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= AX + A_1 X' + A_2 X'',\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= BX + B_1 X' + B_2 X'', \end{aligned}$$

wo:

---

1) Diese Gleichung ist die Bedingung dafür, dass die Gerade FF_1 auch die zweite Fläche berührt.

$$(18)\quad \begin{cases} A = \cos\sigma\cos w_1 \sin w, \\ A_1 = \cos w - R\cos\sigma\sin w_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right), \\ A_2 = R\cos\sigma\cos w_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right). \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} B = -\cos\sigma\sin w_1\cos w, \\ B_1 = -R\cos\sigma\sin w_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial u}\right), \\ B_2 = \sin w + R\cos\sigma\cos w_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial u}\right), \end{cases}$$

$E_1 + G_1 = 1$ giebt die Bedingung:

$$(20)\left[R\cos\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) - \sin w_1\cos w\right]^2 - \sin^2\sigma\cos^2 w_1\sin^2 w$$
$$+\left[R\cos\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial u}\right) + \cos w_1\sin w\right]^2 - \sin^2\sigma\sin^2 w_1\cos^2 w = 0.$$

Die Gleichung (16) lässt sich wegen Gleichung (18), (19) in der Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos w_1 & \sin w_1 \\ A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(21)\quad -A\left(\sin w\cos w_1 + R\cos\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial u}\right)\right)$$
$$+B\left(\cos\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) - \cos w\sin w_1\right) = 0.$$

Aus Gleichung (20), (21) folgt, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass S_1 die verlangte Fläche ist, durch die Gleichungen ausgedrückt wird:

$$(22)\quad \begin{cases} R\cos\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) = \sin w_1\cos w + \sin\sigma\cos w_1\sin w, \\ R\cos\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial u}\right) = -\cos w_1\sin w - \sin\sigma\sin w_1\cos w. \end{cases}$$

Die Bedingung $F_1 = 0$ ist identisch erfüllt.

II. Complementärfläche der pseudosphärischen Rotationsfläche vom elliptischen Typus.

Es soll jetzt die Differentialgleichung (22) für $\sigma = 0$ integriert, sodann zunächst unter der Annahme $c < 0$ die For-

meln für die Complementärfläche der Rotationsfläche vom elliptischen Typus aufgestellt werden, endlich die Fläche diskutiert und auf das gegenseitige Entsprechen der Rotationsfläche und ihrer Complementärfläche hingewiesen werden.

Unter der Annahme

$$\sigma = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = 0, \quad \frac{dw}{du} = \frac{1}{R}\sqrt{\sin^2 w - c}$$

geht Gleichung (22) über in:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin w_1}\dfrac{\partial w_1}{\partial u} = \dfrac{1}{R}\cos w, \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial v} = -\dfrac{1}{R}\sqrt{\sin^2 w - c} - \dfrac{1}{R}\cos w_1 \sin w. \end{cases}$$

Setzt man

$$\operatorname{tg}\frac{w_1}{2} = t_1, \quad \text{also } \frac{dw_1}{\sin w_1} = \frac{dt_1}{t_1}, \quad \cos w_1 = \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2}, \ \sin w_1 = \frac{2t_1}{1 + t_1^2},$$

so folgt aus der ersten Gleichung (23):

$$t_1 = \left(\sin w + \sqrt{\sin^2 w - c}\right) \cdot \frac{V}{\sqrt{c}},$$

wo V allein als Funktion von v aus der zweiten Gleichung (23) zu bestimmen ist:

$$\frac{1}{\sin w_1}\frac{\partial w_1}{\partial v} = -\frac{1}{R\,2t_1}\left\{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w + t_1^2\left(\sqrt{\sin^2 w - c} - \sin w\right)\right\},$$

$$\frac{dV}{dv} = +\frac{\sqrt{c}}{2R}(V^2 - 1),$$

$$\frac{V-1}{V+1} = e^{\frac{\sqrt{c}v}{R} + C}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (23) lautet mithin:

$$(24)\quad \operatorname{tg}\frac{w_1}{2} = t_1 = -\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w\right) \cdot \frac{e^{\sqrt{\frac{cv}{2R}} + \frac{C}{2}} + e^{-\sqrt{\frac{cv}{2R}} - \frac{C}{2}}}{e^{\sqrt{\frac{cv}{2R}} + \frac{C}{2}} - e^{-\sqrt{\frac{cv}{2R}} - \frac{C}{2}}}.$$

Die willkürliche Constante C hat keine geometrische Bedeutung, da sie durch eine Transformation für v von der

Form $\frac{\sqrt{c}\,v}{R} + C = v_1$ verschwindet; wir wollen daher $C = 0$ setzen.

Da in den Werten für t_1, je nachdem $c <$ oder > 0 ist, die Grösse v das eine Mal in trigonometrischen, das andere Mal in hyperbolischen Funktionen vorkommt, wollen wir, um die Übersicht nicht zu erschweren, bereits jetzt eine Unterscheidung der beiden Fälle durchführen und die weiteren Untersuchungen für die Complementärfläche der Rotationsfläche vom elliptischen Typus $c < 0$ durchführen.

1. Formeln.

Wir setzen $c = -c_1$, wo $c_1 > 0$ ist, dann wird:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w\right) \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{c_1}\,v}{2R}\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{c_1}\,v}{2R}\right)}, \tag{25}$$

$$t_1^2 = \frac{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} - \sin w} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\sqrt{c_1}\,v}{2R}}{\sin^2 \frac{\sqrt{c_1}\,v}{2R}}.$$

Führt man zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{\sqrt{c_1}\,v}{2R} = \frac{v_1}{2}, \quad \frac{\sqrt{c_1+1}\,v}{2R} = \frac{v_2}{2}, \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \cos v_2 \cos v_1 + \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sin v_2 \sin v_1 \\ V_2 &= -\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \sin v_2 \cos v_1 + \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cos v_2 \sin v_1 \end{aligned}\right. \tag{27}$$

so erhalten wir aus den Gleichungen (15), (1), (2) folgende Formeln:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{-Rc_1 \cdot V_1}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1} \\ y_1 &= \frac{Rc_1 \cdot V_2}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1} \\ z_1 &= z + \frac{R \cos w}{\sqrt{c_1+1}} \frac{\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$(29)\quad \begin{cases} E_1 = \cos^2 w_1 = \left(\dfrac{1-t_1^2}{1+t_1^2}\right)^2 = \left[-\dfrac{\sqrt{\sin^2 w + c_1}\,\cos v_1 + \sin w}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}\right]^2 \\ G_1 = \sin^2 w_1 = \left(\dfrac{2t_1}{1+t_1^2}\right)^2 = \left[\dfrac{\sqrt{c_1}\cdot \sin v_1}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}\right]^2 \end{cases}$$

$$(30)\quad \begin{cases} r_1' = \quad R \cot w_1 = -R \cdot \dfrac{\sqrt{\sin^2 w + c_1}\,\cos v_1 + \sin w}{\sqrt{c_1}\,\sin v_1} \\ r_2' = -R \operatorname{tg} w_1 = \quad R \cdot \dfrac{\sqrt{c_1}\,\sin v_1}{\sqrt{\sin^2 w + c_1}\,\cos v_1 + \sin w}. \end{cases}$$

Ferner wird, unter Berücksichtigung der Formeln (17), (18), (19), (23):

$$(31)\qquad \begin{aligned} X_1' &= \frac{1}{\cos w_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} \\ &= \sin w\, X + \cos w\,(X' \cos w_1 + X'' \sin w_1) \end{aligned}$$

$$(32)\qquad \begin{aligned} X_1'' &= \frac{1}{\sin w_1}\frac{\partial x_1}{\partial v} \\ &= -\cos w\, X + \sin w\,(X' \cos w_1 + X'' \sin w_1) \end{aligned}$$

$$(33)\qquad X_1 = \cos w_1\, X'' - \sin w_1\, X'$$

und je zwei analoge Gleichungen für Y, Z.

Bevor wir zur Diskussion der Fläche übergehen, wollen wir noch die elliptischen Integrale ausrechnen, d. h. w und z als Funktion von u darstellen.

2. Berechnung der elliptischen Integrale.

Um das Integral $\int \frac{dw}{\sqrt{\sin^2 w + c_1}} = \frac{u + u_0}{R}$ auf die Normalform von Weierstrass zu bringen, setzen wir $\sin^2 w = t$, dann wird $\frac{u+u_0}{R} = \int \frac{dt}{\sqrt{-4t(t-1)(t+c_1)}}$.

Bezeichnen wir mit s die Funktion $\wp \frac{(u+u_0)i}{R}$, setzen

$$t - 1 = m(s - e_1),\quad t = m(s - e_2),\quad t + c_1 = m(s - e_3),$$

wo $\quad e_1 > e_2 > e_3,\ e_1 = \wp\omega,\ e_2 = \wp(\omega + \omega'),\ e_3 = \wp\omega'$

und $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ist, verfügen ferner über die willkürliche Grösse m so, dass $m = 1$ wird und bestimmen die Constante u_0 so, dass für $u = 0$, $\sin w = 1$ wird, so erhalten wir folgende Formeln, wenn wir noch zur Abkürzung $\frac{ui}{R} = u_1$ setzen:

$$(34)\quad \begin{cases} t-1=-\cos^2 w \quad = \wp(u_1+\omega)-e_1=\frac{\sigma_1}{\sigma}(u_1+\omega) \\ t \quad = \quad \sin^2 w \quad = \wp(u_1+\omega)-e_2=\frac{\sigma_2}{\sigma}(u_1+\omega) \\ t+c_1=\sin^2 w+c_1=\wp(u_1+\omega)-e_3=\frac{\sigma_3}{\sigma}(u_1+\omega) \end{cases}$$

$$(35)\qquad e_1-e_2=1,\quad e_1-e_3=c_1+1,\quad e_2-e_3=c_1,$$

$$(36)\qquad e_1=\frac{c_1+2}{3},\quad e_2=\frac{c_1-1}{3},\quad e_3=-\frac{2c_1+1}{3},$$

$$z=-\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}\int\cos^2 w\,du=-\frac{iR}{\sqrt{c_1+1}}\int du_1(\wp(u_1+\omega)-e_1),$$

$$(37)\qquad z=\frac{Ri}{\sqrt{c_1+1}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+\omega)+e_1u_1-\eta_1\right),$$

wo die willkürliche Constante so bestimmt ist, dass für $u=0$ $z=0$ wird, $\eta_1=\frac{\sigma'}{\sigma}\,\omega$.

Man sieht sogleich: Damit z reell bleibt, wir es mithin mit einer reellen Fläche zu thun haben, muss u_1 rein imaginär sein. Für die Vorzeichen von $\sin w$, $\cos w$, $\sqrt{\sin^2 w+c_1}$ bedarf es noch einer Entscheidung: $\sqrt{\sin^2 w+c_1}$ ist stets >0, hat daher, welche imaginären Werte u_1 auch annehmen mag, immer dasselbe Vorzeichen, es sei das positive gewählt. Wenn u_1 von 0 bis $2\omega'$ variiert, so wird $\cos w$ nur für die Endpunkte des Intervalles gleich 0, hat also sonst immer dasselbe Zeichen, $\sin w$ wird für $u_1=\pm\omega'$ gleich 0. Wenn wir jetzt festsetzen — was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit thun können — dass $\sin w$ für das Intervall u_1 von $-\omega'$ bis $+\omega'$ grösser als 0 ist, so sind die Vorzeichen von $\sin w$ für die Intervalle $-2\omega'$ bis $-\omega'$, ω' bis $2\omega'$ die negativen; aber auch über das Vorzeichen von $\cos w$ haben wir damit entschieden, wie folgende Betrachtung lehrt: $\sin w$ als Funktion von u_1 betrachtet, hat für $u_1=0$ seinen grössten Wert und nimmt, während u_1 sich von 0 bis $2\omega'$ bewegt, ab von $+1$ bis -1; es ist nun aber $\frac{d\sin w}{du}=\frac{1}{R}\cos w\sqrt{\sin^2 w+c_1}$, diese Grösse muss für das betrachtete Intervall der Grösse u_1 kleiner als 0 werden; setzt man $R>0$ voraus, so wird für das Inter-

vall u_1 von 0 bis $2\omega'$, $\cos w < 0$, also u_1 von 0 bis $-2\omega'$ $\cos w > 0$. Somit erhalten wir folgende Tabelle:

Bewegt sich

u_1 von $-2\omega'$ bis $-\omega'$, $-\omega' \cdots 0$, $0 \cdots +\omega'$, $\omega' \cdots 2\omega'$,

so bewegt sich

$\sin w$ von -1 „ 0, $0 \cdot\cdot +1$, $+1 \cdot\cdot 0$, $0 \cdot\cdot -1$

und

$\cos w$ „ 0 „ $+1$, $+1 \cdot\cdot 0$, $0 \cdot\cdot -1$, $-1 \cdot\cdot 0$.

Hätten wir $R < 0$ angenommen, so würden wir dieselbe Fläche erhalten haben, nur gespiegelt gegen die XZ- und YZ-Ebenen.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen geht hervor, dass wir das Intervall von u_1 beschränken können auf $-2\omega'$ bis $+2\omega'$.

3. Diskussion der Fläche.

Zur Diskussion der Fläche benutzen wir die Gleichungen (27), (28), (29), S. 17, 18; aus (27) folgt:

$$V_1^2 + V_2^2 = \frac{c_1 + \sin^2 v_1}{c_1(c_1+1)}. \tag{38}$$

Wir setzen ferner:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = R\sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}} \cdot \frac{\sqrt{c_1 + \sin^2 v_1}}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}, \tag{39}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{V_2}{V_1}, \quad \cos \varphi_1 = -\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \\ \sin \varphi_1 = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}. \end{gathered} \tag{40}$$

Aus (40) folgt: Die Krümmungslinien $v = \text{const.}$ liegen in Ebenen, welche sämtlich durch die Z-Axe, die sog. Flächenaxe, gehen.

Aus (28) und (29) kann man die singulären Kurven auf der Fläche erkennen. Es folgt:

Die Kurven

$$v_1 = 0,\ \pi \cdots k\pi \quad \text{und} \quad \sqrt{\sin^2 w + c_1}\cos v_1 + \sin w = 0 \tag{41}$$

sind singuläre Kurven der Fläche.

Da für $u_1 = 0$, $z = 0$, für $u_1 = 2\omega'$, $\cos w = 0$, also $z = z_0 = \frac{Ri}{\sqrt{c_1+1}}(2e_1\omega' + 2\eta')$ und $Z_1 = 0$ wird, so folgt für

die beiden Krümmungslinien $u_1 = 0,\ 2\omega'$ das Ergebnis: Die beiden Krümmungslinien u, welche den Werten $u_1 = 0$ und $2\omega'$ entsprechen, liegen in zwei einander parallelen und zur Flächenaxe senkrechten Ebenen; die Entfernung dieser Ebenen ist $z_0 = \frac{Ri}{\sqrt{c_1+1}}(2e_1\omega' + 2\eta')$, also ebenso gross wie die Entfernung der beiden singulären Parallelkreise bei den Rotationsflächen; aber während dort die Ebenen dieser Kurven die Rotationsfläche berührten, schneiden sie hier die Fläche unter rechtem Winkel. Dasselbe gilt für alle Krümmungslinien $u_1 = 2n\omega'$, wo n eine ganze Zahl ist.

Bestimmung der Symmetrieebenen der Fläche. Setzt man $-u$ statt u, so bleibt nach S. 17 $x_1 y_1$ ungeändert, z_1 geht in $-z_1$ über, dasselbe geschieht für zwei Werte in gleicher Entfernung von $2\omega'$, also für $2\omega' - u_1$ und $2\omega' + u_1$. Setzt man für v, $-v$, so bleibt $x_1 z_1$ ungeändert, y_1 geht in $-y_1$ über. Aus diesen Bemerkungen folgt:

Die XY-Ebene und alle im Abstande

$$z_0 = \frac{Ri}{\sqrt{c_1+1}}(2e_1\omega' + 2\eta')$$

parallelen Ebenen sind Symmetrieebenen der Fläche. Es genügt daher, das Intervall von u_1 zu beschränken auf 0 bis $2\omega'$, da der dem Intervall 0 bis $-2\omega'$ entsprechende Teil der Fläche durch Spiegelung gegen die XY-Ebene sich ergiebt. Auch die XZ-Ebene ist Symmetrieebene der Fläche.

Es soll jetzt der Nachweis geführt werden, dass auch jede durch die Axe gehende Ebene, welche den Werten $v_1 = k\pi$ (k eine ganze Zahl) entspricht, eine Symmetrieebene der Fläche ist. Zu dem Zwecke bilden wir $V_1, V_2, x_1, y_1, z_1, r_1, \varphi_1$ für einen Wert v gleich $\frac{2\pi R}{\sqrt{c_1}} - v$ und bezeichnen alle auf diesen Wert bezüglichen Grössen mit Strichen. Man erhält:

$$v_1' = \frac{\sqrt{c_1}}{R}\left(\frac{2\pi R}{\sqrt{c_1}} - v\right) = 2\pi - v_1,$$

$$v_2' = \frac{\sqrt{c_1+1}}{R}\left(\frac{2\pi R}{\sqrt{c_1}} - v\right) = 2C_1 - v_2, \text{ wo } C_1 = \pi\sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}} \text{ ist.}$$

$$\cos v_1' = \cos v_1, \quad \cos v_2' = \cos(2C_1 - v_2),$$

$$\sin v_1' = -\sin v_1, \quad \sin v_2' = \sin(2C_1 - v_2),$$

also

$$r_1' = r_1, \qquad z_1' = z_1,$$

$$V_1' = \frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \cos(2C_1 - v_2)\cos v_1 - \frac{1}{\sqrt{c_1}} \sin(2C_1 - v_2)\sin v_1,$$

$$V_2' = -\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \sin(2C_1 - v_2)\cos v_1 - \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cos(2C_1 - v_2)\sin v_1,$$

oder

$$\begin{cases} V_1' = \quad \cos 2C_1\, V_1 - \sin 2C_1\, V_2 \\ V_2' = -\cos 2C_1\, V_2 - \sin 2C_1\, V_1. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$x_1' = \cos 2C_1 x_1 + \sin 2C_1 y_1,$$

$$y_1' = \sin 2C_1 x_1 - \cos 2C_1 y_1$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi_1' = -\frac{V_2'}{V_1'} = \frac{\sin(2C_1 - \varphi_1)}{\cos(2C_1 - \varphi_1)},$$

$$\varphi_1' + \varphi_1 = 2C_1 + 2k\pi.$$

Diese Formeln lassen erkennen, dass die Ebene $v_1 = \pi$ und daher jede Ebene $v_1 = k\pi$ Symmetrieebene der Fläche ist; es genügt daher, die Variabilität von v zu beschränken auf 0 bis $\frac{R\pi}{\sqrt{c_1}}$ $(v_1 = \pi)$.

Zur Abkürzung wollen wir den Winkel φ einer Ebene v mit der XZ-Ebene mit „Azimuth", das dem Werte $v_1 = \pi$ entsprechende Azimuth φ_0 mit „Grenzwinkel" bezeichnen. Es war $\varphi_0 = \sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}}\,\pi + k\pi$; es handelt sich jetzt darum, diesen Grenzwinkel eindeutig zu bestimmen oder m. a. W. den Wert von k zu berechnen, eine Aufgabe, die wir mit Hilfe der folgenden Betrachtung vollständig lösen können:

Zunächst wollen wir uns davon überzeugen, dass φ als Funktion von v für keinen Wert von v ein Maximum oder Minimum hat, zu dem Zwecke bilden wir $\frac{d\varphi}{dv}$, es wird:

$$\alpha.\quad \begin{cases} \dfrac{dV_1}{dv} = \cos v_2 \sin v_1 \cdot \dfrac{1}{R\sqrt{(c_1+1)\,c_1}}, \\ \dfrac{dV_2}{dv} = -\sin v_2 \sin v_1 \cdot \dfrac{1}{R\sqrt{(c_1+1)\,c_1}}, \end{cases}$$

$$\beta.\quad \frac{d\varphi}{dv} = \frac{\sqrt{c_1+1}}{R} \cdot \frac{\sin^2 v_1}{c_1 + \sin^2 v_1}.$$

Da für $\sin v_1 = 0$ $\frac{d^2\varphi}{dv^2} = 0$, $\frac{d^3\varphi}{dv^3} \gtrless 0$ ist, folgt sogleich die Richtigkeit obiger Behauptung.

Für $v = 0$ wird $V_1 > 0$, $V_2 = 0$, für sehr kleine positive Werte von v $(v = +\varepsilon)$ wird $V_2 < 0$; um dies einzusehen braucht man nur V_2 nach Taylor entwickeln:

$$V_2 = -\frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \frac{c_1+1}{3!\,R^2}\varepsilon^2 + \cdots\right)\cdot\left(1 - \frac{c_1}{2!}\frac{\varepsilon^2}{R^2} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - \frac{c_1+1}{2!}\frac{\varepsilon^2}{R^2} + \cdots\right)\cdot\left(1 - \frac{c_1}{3!}\frac{\varepsilon^2}{R^2} + \cdots\right) < 0.$$

Jetzt wollen wir die Werte in Betracht ziehen, für welche V_2 ein Maximum oder Minimum wird.

Es war $\frac{dV_2}{dv} = -\frac{1}{R\sqrt{c_1(c_1+1)}}\sin v_2 \sin v_1$.

Beschränken wir das Intervall von v in der angegebenen Weise auf 0 bis $v_1 = \pi$, so sind die Werte von v, für welche V_2 ein Maximum oder Minimum wird, $v_2 = k\pi$, $v_1 = \pi$, den Wert $v_1 = 0$ schliessen wir natürlich aus, da für ihn V_2 weder Maximum noch Minimum hat.

Für $v_1 = \pi$ wird $V_2 = \frac{1}{\sqrt{c_1+1}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}}\,\pi\right)$,

$$\frac{d^2V_2}{dv^2} = \frac{1}{R^2\sqrt{c_1+1}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}}\,\pi\right),$$

„ $v_2 = k\pi$ „ $V_2 = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}}\,\pi k\right)\cdot\cos k\pi$,

$$\frac{d^2V_2}{dv^2} = -\frac{1}{R^2\sqrt{c_1+1}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}}\,k\pi\right)\cdot\cos k\pi.$$

Wir fragen jetzt, wieviel Werte $v_2 = k\pi$ giebt es, welche im Intervall $0 \cdots v_1 = \pi$ liegen?

Es seien p Werte, so wird doch offenbar:

$$(p+1)\,\pi\frac{R}{\sqrt{c_1+1}} > \pi\frac{R}{\sqrt{c_1}} > p\pi\frac{R}{\sqrt{c_1+1}}$$

oder

$$p + 1 > \sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}} > p.$$

Liegt also $\sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}}$ zwischen p und $p+1$, so giebt es p Werte $v_2 = k\pi$, für welche V_2 ein Maximum oder Minimum

werden kann, also $k = 1, 2, \cdots, p$. Es ist unter dieser Bedingung $\frac{1}{p} > \sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}} > \frac{1}{p+1}$, also $\sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}}\pi k \leqq \pi$, mithin $\sin\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}}\,k\pi\right) > 0$.

Daraus folgt nun: $\left(\frac{d^2 V_2}{dv^2}\right)_{v_2=k\pi}$ nimmt abwechselnd negative und positive Werte an und zwar zuerst einen positiven, $(V_2)_{v_2=k\pi}$ wird also abwechselnd ein Minimum resp. Maximum, zuerst ein Minimum. Der Wert von $(V_2)_{v_2=k\pi}$ selbst ist abwechselnd negativ und positiv, zuerst negativ; also zwischen jedem Maximum und Minimum nimmt V_2 immer einmal den Wert 0 an; es giebt p solcher Maximal- resp. Minimalwerte. Ist nun p eine gerade Zahl, so ist V_2 für den letzten Wert, also für $v_2 = p\pi$, grösser als 0, ist p eine ungerade Zahl, so ist für $k = p$ $\;V_2 < 0$. Nun ist aber für $v_1 = \pi$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \sin\sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}}\,\pi,$$

also, wenn p eine gerade Zahl ist, so wird für $v_1 = \pi$ $\;V_2 > 0$, wenn p ungerade, so für $v_1 = \pi$ $\;V_2 < 0$, daraus folgt nun, dass zwischen dem Werte $v_2 = p\pi$ und $v_1 = \pi$ $\;V_2$ nicht den Wert 0 annimmt. Mithin haben wir gerade $p - 1$ Werte, für welche V_2 und damit y_1 den Wert 0 annimmt (den Wert $v = 0$ ausgeschlossen).

Wir können die Resultate in folgendem Satze vereinigen: Liegt $\sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}}$ zwischen den ganzen Zahlen p und $p+1$ oder c_1 zwischen $\frac{1}{p^2-1}$ und $\frac{1}{(p+1)^2-1}$, so giebt es gerade $p-1$ Werte, für welche die Y-Koordinate den Wert 0 annimmt, d. h. für welche die Fläche die XZ-Ebene schneidet, vorausgesetzt natürlich $0 < v < \frac{R\pi}{\sqrt{c_1}}$ $(v_1 = \pi)$. Der Grenzwinkel φ_0 liegt also im p^{ten} Halbkreis; ist insbesondere $c_1 > \frac{1}{3}$, so liegt er im ersten Halbkreis, daraus folgt $\varphi_0 = \sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}}\,\pi - \pi$, und damit ist der Grenzwinkel eindeutig bestimmt.

Von der Wahl der Konstanten c_1 also hängt es ab, wie oft die Fläche sich um die Axe herumwindet. φ_0 nähert sich

mit wachsendem c_1 immer mehr dem Werte 0, d. h. die Fläche schrumpft immer mehr auf die XZ-Ebene zusammen; je mehr dagegen c_1 sich der 0 nähert, um so grösser ist die Anzahl der Windungen um die Axe.

Die Krümmungslinien u. Die Krümmungslinien u liegen auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden. Der Beweis dieser Behauptung liegt schon darin enthalten, dass die zweite Schar von Krümmungslinien eben sind und wird später[1]) allgemeiner erbracht. Für unsere Fläche lässt sich aber das Resultat auch direkt durch Rechnung nachweisen. Bildet man nämlich:

$$\Phi = x_1^2 + y_1^2 + \left(z_1 - z - \frac{UR}{\sqrt{c_1+1}}\right)^2 \quad (U \text{ Funktion von } u),$$

so ist es möglich, U so zu bestimmen, dass Φ allein Funktion von u wird.

Durch geeignete Umformungen lässt sich Φ nämlich in der Form schreiben:

$$\Phi = \frac{R^2}{c_1+1}(U^2 + \cos^2 w) + \frac{R^2}{(c_1+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}$$
$$\left\{-2U \sin w \cos w + c_1 \sqrt{\sin^2 w + c_1}\right.$$
$$\left. + \cos v_1\left(-2U\sqrt{\sin^2 w + c_1}\cos w - c_1 \sin w\right)\right\}.$$

Aus dieser Form folgt, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass Φ Funktion von u ist, lautet:

$$-2U \sin w \cos w + c_1 \sqrt{\sin^2 w + c_1} = Fw \sqrt{\sin^2 w + c_1}$$
$$2U\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos w + c_1 \sin w = -\sin w \, Fw.$$

Man erhält:

$$\text{a.} \quad x_1^2 + y_1^2 + \left(z_1 - z + \frac{R\sqrt{\sin^2 w + c_1}\sin w}{\sqrt{c_1+1}\cos w}\right)^2 = \frac{R^2}{\cos^2 w} \quad \text{und}$$

$$\text{b.} \quad X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1\left(z_1 - z - \frac{UR}{\sqrt{c_1+1}}\right) = 0.$$

Durch die letzten beiden Formeln ist die Behauptung bewiesen. Der Radius der Kugel $\frac{R}{\cos w}$ wird $= \infty$ für $u_1 = 0, \pm 2\omega'$,

---

1) Vgl. Seite 61 f.

für $u_1 = \omega'$ gleich R, während U für $u_1 = \omega'$ gleich 0 wird. Die Z-Koordinate des Mittelpunktes der Kugel als Funktion von u ausgedrückt, giebt den Wert $\frac{Rc}{\sqrt{c_1+1}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}u_1 + e_1 u_1\right)$[1].

Berechnet man die geodätische Krümmung der Krümmungslinien u nach der Formel[2])

$$g_u = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{1}{\sin w_1}\frac{\partial w_1}{\partial u} = -\frac{\cos w}{R},$$

so erhält man den Satz: Die geodätische Krümmung der Krümmungslinien u ist constant[3]) und gleich dem reciproken Werte des Radius der Kugel, auf welcher die Krümmungslinie liegt.

Da die geodätische Krümmung für $u_1 = 0, \pm 2\omega_1'$ gleich 0, für $u_1 = \pm\omega'$ gleich $\pm\frac{1}{R}$ ist, so folgt: die Kurven $u_1 = 0, \pm 2\omega'$ sind geodätische Linien[4]), die Kurven $u_1 = \pm\omega'$ Grenzkreise auf der Fläche.

Ohne Schwierigkeiten lässt sich der Verlauf der Kurve $u_1 = 0$ erkennen; wir wollen die zur Discussion der Kurve nötigen Formeln aufstellen und den Verlauf der Kurve dann sogleich angeben:

$$x_1 = -\frac{Rc_1 V_1}{\sqrt{c_1+1}+\cos v_1}, \quad y_1 = \frac{Rc_1 V_2}{\sqrt{c_1+1}+\cos v_1}, \quad z_1 = 0,$$

$$\frac{\frac{dy_1}{dv}}{\frac{dx_1}{dv}} = \frac{\sqrt{c_1+1}\sin v_2 \cos v_1 - \sqrt{c_1}\cos v_2 \sin v_1 + \sin v_2}{\sqrt{c_1+1}\cos v_2 \cos v_1 + \sqrt{c_1}\sin v_2 \sin v_1 + \cos v_2},$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right) = \frac{1}{(\text{Nenner})^2 R}\cdot\left(\sqrt{c_1+1}+\cos v_1\right)\left(\sqrt{c_1+1}\cos v_1 + 1\right),$$

---

1) Diesen Wert leitet man mit Hilfe der „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der ellipt. Funkt. Art. 11 von H. A. Schwarz“ ab.

2) Knoblauch, Fl.-Th. S. 248. Bianchi, Diff.-Geom. S. 148.

3) Auch dies Resultat gilt allgemein für die pseudosphärischen Flächen, für welche $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = U\cdot V$, vgl. S. 61 f.

4) Dies Resultat hätte man auch daraus folgern können, dass diese Kurven Krümmungslinien sind und in Ebenen liegen, welche die Fläche rechtwinklig schneiden.

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = R\sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}} \cdot \frac{\sqrt{c_1 + \sin^2 v_1}}{\sqrt{c_1+1} + \cos v_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{V_2}{V_1},$$

$$\frac{dr_1}{dv} = \frac{c_1 \sin v_1}{(\sqrt{c_1+1} + \cos v_1) \cdot \sqrt{c_1 + \sin^2 v_1}},$$

$$\frac{d\varphi_1}{dv} = \frac{\sqrt{c_1+1} \cdot \sin^2 v_1}{R(c_1 + \sin^2 v_1)},$$

$$\frac{d^2 r_1}{dv^2} \text{ (für } \sin v_1 = 0, \quad v_1 = k\pi) = \frac{c_1 \cos k\pi}{(\sqrt{c_1+1} + \cos k\pi)\sqrt{c_1}}.$$

μ sei der Winkel, welchen der Radiusvector mit der Kurve bildet, so wird:

$$\operatorname{tg} \mu = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sin v_1}{\sqrt{c_1}},$$

$$\sin^2 \mu = \frac{\sin^2 v_1}{c_1 + \sin^2 v_1}, \qquad \cos^2 \mu = \frac{c_1}{c_1 + \sin^2 v_1}.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich folgender Verlauf der Kurve: Die Kurve verläuft zwischen zwei concentrischen Kreisen um den Anfangspunkt als Mittelpunkt und trifft dieselben abwechselnd unter rechtem Winkel in einer Spitze; für einen Wert v_1, welcher bestimmt ist durch $\sqrt{c_1+1}\cos v_1 + 1 = 0$, hat die Kurve einen Wendepunkt (vgl. die Figuren 6, 7).

Betrachten wir einen Punkt der Kurve $u_1 = 0$, welcher zum Argument $\pi - v_1$ gehört und bezeichnen seinen Radiusvector mit r_1', so wird

$$r_1' = R\sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}} \cdot \frac{\sqrt{c_1 + \sin^2 v_1}}{\sqrt{c_1+1} - \cos v_1}, \quad \text{also} \quad r_1' \cdot r_1 = R^2 \frac{c_1}{c_1+1}$$

und sein Azimuth φ_1' wird $\varphi_1' = \varphi_0 - \varphi_1$[1]). Ist also $r_1 \varphi_1$ ein Punkt der Kurve, so erhält man einen zweiten durch die Formeln $r_1' = R^2 \frac{c_1}{c_1+1}\frac{1}{r_1}$, $\varphi_1' = \varphi_0 - \varphi_1$. Die Kurve $u_1 = 2\omega'$ kann man aus der Kurve $u_1 = 0$ punktweise konstruieren, denn sei mit r_1'' der zum Argument v_1, also auch zum Azimuth φ_1 gehörige Radiusvector der Kurve $u_1 = 2\omega'$ bezeichnet, so wird:

---

1) Der Beweis für diese Behauptung wird durch eine Rechnung erbracht, welche der auf S. 21 durchgeführten ganz analog ist; es wird

$$v_1' = \pi - v_1, \quad v_2' = \varphi_0 - v_2, \quad \cos v_1' = -\cos v_1, \quad \sin v_1' = \sin v_1$$

und

$$\varphi_1' + \varphi_1 = \varphi_0.$$

$r_1'' = R^2 \frac{c_1}{c_1+1} \cdot \frac{1}{r_1}$ oder $r_1'' = r_1'$, m. a. W.: Denkt man sich die Kurve $u_1 = 2\omega'$ parallel mit sich in die XY-Ebene verschoben und gegen die Gerade mit dem Azimuth $\frac{\varphi_0}{2}$ gespiegelt, so erhält man die Kurve $u_1 = 0$.

Diese letzten Bemerkungen folgen als specielle Fälle aus einer allgemeineren Eigenschaft der Fläche, welche wir jetzt ableiten wollen: Es sei $r_1 \varphi_1 z_1$ der zu den Argumentwerten $u_1 v_1$ gehörige Punkt der Fläche; der den Werten $2\omega' - u_1$, $\pi - v_1$ entsprechende Punkt habe die Koordinaten $r_1' \varphi_1' z_1'$.

Es wird:

$$r_1' = r_1, \quad \varphi_1' + \varphi_1 = \varphi_0, \quad z_1' + z_1 = z_0.$$

Diese Formeln geben den Satz: Spiegelt man die Fläche einmal gegen die durch die Flächenaxe gelegte Ebene, deren Azimuth $\frac{\varphi_0}{2}$ ist, dann gegen eine senkrecht zur Axe durch die Mitte (d. h. in der Entfernung $\frac{z_0}{2}$ von der XY-Ebene) gelegte Ebene, so geht die Fläche in sich selber über; einer Krümmungslinie v, deren Ebene das Azimuth φ_1 besitzt, entspricht also immer eine andere mit dem Azimuth $\varphi_0 - \varphi_1$, welche symmetrisch zur ersten in bezug auf die Ebene $z = \frac{z_0}{2}$ ist, die Krümmungslinie $v_1 = \frac{\pi}{2}$ besitzt also diese Gerade als Symmetrieaxe. Damit ist die dieser Fläche eigentümliche „Symmetrie durch zweimalige Spiegelung“ nachgewiesen.

Die Krümmungslinien $v = \text{const.}$ Um von der Fläche ein anschauliches Bild zu bekommen, soll jetzt der Verlauf der Krümmungslinien v genauer untersucht werden; diese Kurven sind einerseits zur Diskussion besonders geeignet, weil sie ja in Ebenen durch die Z-Axe liegen, andererseits gewähren sie gleichzeitig aus demselben Grunde eine klare Vorstellung von der Fläche.

Es sei vorher noch die Bemerkung gemacht, dass der Winkel, unter welchem die Ebenen v die Fläche schneiden, derselbe wie der auf S. 27 mit μ bezeichnete Winkel ist, weil nämlich nach dem Satz von Joachimsthal der allgemeinen Flächentheorie eine Fläche, welche ebene Krümmungslinien

besitzt, von diesen Ebenen unter constantem Winkel geschnitten wird (μ ist aber der Winkel, welchen die Normale der Ebene v mit der Flächennormale bildet).

Nach dieser Vorbemerkung gehen wir zur Discussion über. Zunächst werde eine Transformation der Koordinaten auf die Ebene der Kurven durchgeführt. Wir hatten:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{V_2}{V_1}, \quad \cos \varphi_1 = -\frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}};$$

setzen wir jetzt:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi, \\ y_2 = x_1 \sin \varphi - y_1 \cos \varphi, \end{cases}$$

so wird:

$$\text{a.} \quad \begin{cases} x_2 = R\sqrt{\dfrac{c_1}{c_1+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{c_1 + \sin^2 v_1}}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}, \\ y_2 = 0, \\ z_2 = z_1 = z + \dfrac{R \cos w}{\sqrt{c_1+1}} \dfrac{\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}. \end{cases}$$

Durch Differentiation unter Berücksichtigung von (29) erhält man:

$$\text{b.} \quad \frac{dx_2}{du} = \cos w \cos w_1 \cdot \frac{x_2}{R}$$

$$= -\frac{\sqrt{c_1} \cdot \cos w \cdot \sqrt{c_1 + \sin^2 v_1} \left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w\right)}{\sqrt{c_1+1} \left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1\right)^2},$$

$$\text{c.} \quad \frac{dz_2}{du} = \frac{\cos w_1}{\sqrt{c_1+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1} \cdot \left\{\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1)\right\},$$

$$\text{d.} \quad \frac{dz_2}{dx_2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1)}{\sqrt{c_1} \cdot \cos w \sqrt{c_1 + \sin^2 v_1}},$$

$$\text{e.} \quad \frac{d}{du}\left(\frac{dz_2}{dx_2}\right) = \frac{(c_1 + 1) \cdot \left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1\right)}{R\sqrt{c_1} \cos^2 w \sqrt{c_1 + \sin^2 v_1}}.$$

Für $\cos w_1 = 0$ wird:

$$\text{f.} \quad \frac{d^2 x_2}{du^2} = -\frac{\sqrt{c_1} \cos^2 w \cdot \sqrt{c_1 + \sin^2 v_1}}{\sqrt{c_1+1} \left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1\right)},$$

$$\text{g.} \quad \frac{d^2 z_2}{du^2} = -\frac{c_1}{\sqrt{c_1+1}} \frac{\cos w \sin w}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}.$$

Für $\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1) = 0$ wird:

h. $$\frac{d^2 z_2}{du^2} = \frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \frac{c_1 \cdot \cos w \cdot \sin w}{(\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1)^2} \cdot$$
$$\left\{\sin w \cos v_1 + \sqrt{\sin^2 w + c_1}\,(c_1 + 1)\right\}.$$

Wie sich aus den aufgestellten Formeln ergiebt, giebt es drei besondere Werte von u_1, für welche $\frac{dx_2}{du}$ oder $\frac{dz_2}{du}$ gleich 0 werden; wir wollen diese Werte von u_1 und das Verhalten der Kurven in den entsprechenden Punkten jetzt ins Auge fassen. Die drei Werte sind durch die Gleichungen bestimmt:

1) $\cos w = 0$,

2) $\cos w_1 = 0$ oder $\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w = 0$,

3) $\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1) = 0$.

Der erste Fall erledigt sich sehr schnell aus den bereits bekannten Resultaten; die Kurve schneidet die X_2-Axe und alle im Abstande z_0 parallelen Geraden unter rechtem Winkel.

Der dem Falle $\cos w_1 = 0$ entsprechende Wert von u_1 sei mit u_s bezeichnet. Die Gleichung $\cos w_1 = 0$ für beliebige u und v stellt, wie auf S. 20 bereits bemerkt, eine singuläre Kurve der Fläche dar; die Kurve v wird daher für $u_1 = u_s$ einen singulären Punkt haben und in der That wird $\frac{dx_2}{du} = 0$, $\frac{dz_2}{du} = 0$, $\operatorname{tg} \alpha$ dagegen hat einen endlichen Wert; je nachdem $\cos v_1 <$ oder > 0 ist, wird $\sin w$ für $u_1 = u_s$ $>$ oder < 0, u_s liegt also zwischen 0 und ω' oder $\omega' \cdot\cdot 2\omega'$.

Der dem Falle $\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1) = 0$ entsprechende Wert von u_1 sei mit u_m bezeichnet. Für $u_1 = u_m$ wird $\frac{dz_2}{du} = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$; die Tangente in diesem Punkte ist parallel der X_2-Axe; je nachdem $\cos v_1 <$ oder > 0 wird, liegt u_m zwischen 0 und ω' oder ω' und $2\omega'$.

Bevor wir die Natur des singulären Punktes und überhaupt den Verlauf der Kurve näher untersuchen, wollen wir zunächst die Frage beantworten: Giebt es, wenn v_1 beliebig gewählt ist, Werte von u_1, für welche $\cos w_1 = 0$ und

$$\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1) = 0$$

ist, und welches ist die Bedingung dafür?

Der Ausdruck $\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w$ als Funktion von u betrachtet, erreicht seinen Maximalwert M_a für $\sin w = +1$, seinen Minimalwert M_i für $\sin w = -1$ und zwar wird:

$$M_a = \sqrt{c_1 + 1} \cos v_1 + 1, \qquad M_i = \sqrt{c_1 + 1} \cos v_1 - 1.$$

Damit also ein Wert u_s möglich ist, ist notwendig und hinreichend, dass $M_a > 0$ und $M_i < 0$ ist oder: Für alle Werte v_1, welche so bestimmt sind, dass $\frac{1}{\sqrt{c_1 + 1}} \geqq \cos v_1 \geqq - \frac{1}{\sqrt{c_1 + 1}}$ ist, besitzt die Kurve einen singulären Punkt; ist aber v_1 so bestimmt, dass entweder

$$+1 \geqq \cos v_1 > \frac{1}{\sqrt{c_1 + 1}} \quad \text{oder} \quad - \frac{1}{\sqrt{c_1 + 1}} > \cos v_1 \geqq -1$$

ist, so besitzt die Kurve v keinen singulären Punkt.

Der Ausdruck $\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1)$ als Funktion von u betrachtet, erreicht ebenfalls seinen Maximalwert M_a für $\sin w = +1$, seinen Minimalwert M_i für $\sin w = -1$ und zwar wird:

$$M_a = \sqrt{c_1 + 1} \left(\cos v_1 + \sqrt{c_1 + 1}\right),$$
$$M_i = \sqrt{c_1 + 1} \left(\cos v_1 - \sqrt{c_1 + 1}\right).$$

Da M_a stets > 0, M_i stets < 0 ist, so folgt: Im Intervall u_1 von 0 bis $2\omega'$ giebt es stets einen und zwar nur einen Wert u_m, für den $\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1) = 0$ wird.

Um die gegenseitige Lage von u_s und u_m erkennen zu können, wollen wir vorübergehend den Ausdruck

$$\sqrt{\sin^2 w + c_1} \cos v_1 + \sin w (c_1 + 1)$$

mit A bezeichnen, dann erkennen wir folgendes:

Ist $\cos v_1 < 0$, so wird für $u_1 = 0$ $A > 0$, für $u_1 = u_s$ $A > 0$, für $u_1 = u_m$ $A = 0$, daraus folgt $|u_s| < |u_m|$.

Ist $\cos v_1 > 0$, so wird für $u_1 = \omega'$ $A > 0$, für $u_1 = u_s$ $A < 0$, für $u_1 = u_m$ $A = 0$, daraus folgt $|u_m| < |u_s|$.

In jedem Falle liegt u_m dem Werte ω' näher als der Wert u_s.

Die aus den Formeln a—g ableitbaren Ergebnisse wollen wir in die folgenden Formelreihen zusammenfassen:

1) $\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} > \cos v_1 > -\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$, Kurven mit singulärem Punkt.

a) $\cos v_1 < 0$: für $u = 0$ wird $\cos w_1 < 0$, $0 < u_s < \omega'$,

$$0 < u_m < \omega', \; |u_s| < |u_m|, \; (z_2)_s = (z)_s < \frac{z_0}{2},$$

b) $\cos v_1 > 0$: für $u = 0$ wird $\cos w_1 < 0$, $\omega' < u_s < 2\omega'$,

$$\omega' < u_m < 2\omega', \; |u_m| < |u_s|, \; (z_2)_s = (z)_s > \frac{z_0}{2};$$

a) $\cos v_1 < 0$: $(z_2)_m = z_m - \frac{R}{\sqrt{c_1+1}} \frac{c_1 \cos w \sin w}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}$

$$|(z_2)_m| < \left|\frac{z_0}{2}\right|, \text{ für } u_1 = u_s \text{ wird } \operatorname{tg}\alpha < 0,$$

b) $\cos v_1 > 0$: $(z_2)_m = z_m - \frac{R}{\sqrt{c_1+1}} \frac{c_1 \cos w \sin w}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1}$

$$|(z_2)_m| > \left|\frac{z_0}{2}\right|, \text{ für } u_1 = u_s \text{ wird } \operatorname{tg}\alpha > 0;$$

a) $\cos v_1 < 0$: bewegt sich u_1 von 0 bis u_s, so wird

$$\frac{dx_2}{du} > 0, \frac{dz_2}{du} < 0; \; u_1 \text{ von } u_s \text{ bis } u_m \; \frac{dx_2}{du} < 0, \frac{dz_2}{du} > 0;$$

b) $\cos v_1 > 0$: bewegt sich u_1 von 0 bis u_m, so wird

$$\frac{dx_2}{du} > 0, \frac{dz_2}{du} < 0; \; u_1 \text{ von } u_m \text{ bis } u_s \text{ so } \frac{dx_2}{du} > 0, \frac{dz_2}{du} > 0.$$

a) $\cos v_1 < 0$: bewegt sich u_1 von u_m bis $2\omega'$,

$$\text{so } \frac{dx_2}{du} < 0, \frac{dz_2}{du} < 0.$$

b) $\cos v_1 > 0$: bewegt sich u_1 von u_s bis $2\omega'$,

$$\text{so } \frac{dx_2}{du} < 0, \frac{dz_2}{du} < 0.$$

a) $\cos v_1 < 0$: für $u_1 = u_s$ wird $\frac{d^2x_2}{du^2} < 0$, x_2 Maximum,

$$\frac{d^2z_2}{du^2} > 0, \; z_2 \text{ Minimum};$$

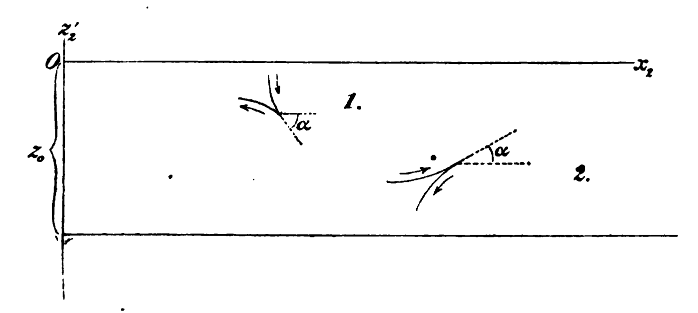
b) $\cos v_1 > 0$: für $u_1 = u_s$ wird $\frac{d^2x_2}{du^2} < 0$, x_2 Maximum;

$$\frac{d^2z_2}{du^2} < 0, \; z_2 \text{ Maximum};$$

a) $\cos v_1 < 0$: für $u_1 = u_m$ wird $\frac{d^2 z_2}{du^2} < 0$, z_2 Maximum,

b) $\cos v_1 > 0$: „ $u_1 = u_m$ „ $\frac{d^2 z_2}{du^2} > 0$, z_2 Minimum.

Aus diesen Formeln geht hervor, dass der singuläre Punkt eine Spitze ist, und zwar je nachdem $\cos v_1 < 0$ oder $\cos v_1 > 0$ ist, eine Spitze von der Form 1 oder der Form 2: $(z_0 < 0)$.



2) Kurven v ohne singulären Punkt:

a) $\cos v_1 < 0$: $-\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} > \cos v_1 > -1$,

für $u_1 = 0$ wird $\cos w_1 > 0$, also immer $\cos w_1 > 0$,

$0 < u_m < \omega'$, $(z_2)_m > 0$,

b) $\cos v_1 > 0$: $+\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} < \cos v_1 < +1$,

für $u_1 = 0$ wird $\cos w_1 < 0$, also immer $\cos w_1 < 0$,

$\omega' < u_m < 2\omega'$, $(z_2)_m < z_0$,

a) $\cos v_1 < 0$: bewegt sich u_1 von 0 bis u_m, so wird $\frac{dx_2}{du} < 0$,

$\frac{dz_2}{du} > 0$, u_1 von u_m bis $2\omega'$, $\frac{dx_2}{du} < 0$, $\frac{dz_2}{du} < 0$,

b) $\cos v_1 > 0$: bewegt sich u_1 von 0 bis u_m, so wird $\frac{dx_2}{du} > 0$,

$\frac{dz_2}{du} < 0$, u_1 von u_m bis $2\omega'$, $\frac{dx_2}{du} > 0$, $\frac{dz_2}{du} > 0$,

a) $\cos v_1 < 0$: für $u_1 = u_m$ wird $\frac{d^2 z_2}{du^2} < 0$, z_2 Maximum.

b) $\cos v_1 > 0$: „ $u_1 = u_m$ „ $\frac{d^2 z_2}{du^2} > 0$, z_2 Minimum.

Die in diesen Formelreihen enthaltenen Angaben über die Kurven v fassen wir folgendermassen zusammen: Die Kurven $v_1 = \text{const.}$ zerfallen in zwei Gruppen, in solche mit und solche ohne singulären Punkt, je nachdem entweder

$$-\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \leqq \cos v_1 \leqq +\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} > \cos v_1 \geqq -1,$$
$$+\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} < \cos v_1 \leqq 1$$

ist. Unter allen Kurven v giebt es fünf besondere: 1) die dem Werte $\cos v_1 = 0$, $v_1 = \frac{\pi}{2}$ entsprechende Kurve, welche symmetrisch zur Geraden $z_2 = \frac{z_0}{2}$ ist; 2) die beiden den Werten $\cos v_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$ entsprechenden Kurven, welche die Grenzkurven bilden zwischen den Krümmungslinien v mit und denen ohne singulären Punkt; 3) die beiden den Werten $\cos v_1 = \pm 1$ entsprechenden Kurven, welche in Tangentialebenen der Fläche liegen und singuläre Kurven auf der Fläche darstellen.

Der Verlauf der Kurven ist folgender, während u_1 von 0 bis $2\omega'$ variiert:

1) Es sei $-\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} < \cos v_1 < 0$. x_2 wächst, z_2 nimmt ab, bis für $u_1 = u_s$ x_2 sein Maximum, z_2 sein Minimum in einer mit der positiven X_2-Axe einen spitzen, negativen Winkel bildenden, also nach unten gerichteten Spitze erreicht; von diesem Punkte an nimmt x_2 beständig ab, z_2 wächst zunächst, bis es für u_m sein Maximum $(z_2)_m > (z_2)_s > \frac{z_0}{2}$ erreicht (Tangente parallel der X_2-Axe), um dann von $(z_2)_m$ an abzunehmen, bis für $u_1 = 2\omega'$ die Kurve die im Abstand z_0 zur X_2-Axe parallel gezogene Gerade senkrecht schneidet. Der weitere Verlauf der Kurve ergiebt sich durch Spiegelung gegen die X_2-Axe und alle im Abstand z_0 parallele Geraden [1]).

---

1) Man vergleiche zu diesen und den folgenden Ausführungen die Figuren 1—5 und 1—5a, welche durch numerische Berechnung ihrer wesentlichsten Punkte unter der Annahme $c_1 = \frac{1}{3}$ gefunden wurden; die dort mit 1 bezeichnete Kurve ist die dem Werte $\cos v_1 = 0$ ent-

2) $\frac{1}{\sqrt{c_1+1}} > \cos v_1 > 0$. Der Verlauf einer jeden dieser Kurven ergiebt sich durch Spiegelung der entsprechenden, d. h. zum Werte $-\cos v_1$ gehörigen unter 1) betrachteten Kurve gegen eine parallel zur X_2-Axe im Abstande $\frac{z_0}{2}$ gezogene Gerade.

3) Nähert sich v_1 von der einen oder andern Seite dem Werte $\frac{\pi}{2}$ ($\cos v_1 = 0$), so rücken die den Werten $u_s u_m \omega'$ entsprechenden Punkte immer näher zusammen; die Tangente in der Spitze bildet mit der X_2-Axe einen immer kleineren (positiven oder negativen) Winkel. Im Grenzfall $\cos v_1 = 0$ fallen die drei zu $u_s u_m \omega'$ gehörigen Punkte zusammen, die Spitze ist parallel zur X_2-Axe gerichtet, und die Kurve verläuft symmetrisch zur Geraden $z_2 = \frac{z_0}{2}$.

4) Nähert sich v_1 immer mehr den andern Grenzwerten $-\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$ resp. $+\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$, so nähern sich die Spitzen immer mehr der X_2-Axe resp. der Geraden $z_2 = z_0$; die Tangente in der Spitze bildet mit der X_2-Axe einen Winkel, welcher sich immer mehr dem Werte $-\frac{\pi}{2}$ resp. $+\frac{\pi}{2}$ nähert. Im Grenzfalle $\cos v_1 = -\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$ resp. $= +\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$ fällt die Spitze in die Gerade $z_2 = 0$ resp. $z_2 = z_0$ und ist parallel gerichtet der negativen resp. positiven Z_2-Axe. Die Kurven schneiden, da $|(z_2)_m| > |(z_2)_s|$, die X_2-Axe resp. die Gerade $z_2 = z_0$ noch in einem zweiten Punkte, ausser dem dem Werte $u_1 = 0$ resp. $2\omega'$ entsprechenden Punkte; da nun der weitere Verlauf dieser Kurven sich durch Spiegelung gegen die Geraden $z_2 = 0, z_0 \cdots$

---

sprechende symmetrische Kurve; 2, 3 resp. 2[a], 3[a] sind Krümmungslinien mit singulärem Punkt; 4 resp. 4[a] sind die den Werten $\cos v_1 = +\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$ resp. $-\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$ entsprechenden Kurven, welche also die Grenzkurven zwischen den Krümmungslinien mit und denen ohne Spitze bilden; die Kurven 5, 5[a] endlich sind die zu $\cos v_1 = +1, -1$ gehörigen Kanten der Fläche..

ergiebt, so folgt, dass die Kurve $\cos v_1 = -\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$ auf der X_2-Axe, die Kurve $\cos v_1 = +\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$ auf der Geraden $z_2 = z_0$ einen Doppelpunkt haben. Da man sich alle Kurven v_1 continuierlich in einander übergehend denken muss, so muss es unter den Kurven v mit singulärem Punkt auch solche geben, welche auf der X_2-Axe resp. der Geraden $z_2 = z_0$ zwei Doppelpunkte besitzen.

5) $-1 < \cos v_1 < -\frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$. x_2 nimmt beständig ab, z_2 wächst bis $(z_2)_m > 0$, um dann bis z_0 abzunehmen, Doppelpunkt auf der X_2-Axe. $+1 > \cos v_1 > \frac{1}{\sqrt{c_1+1}}$: diese Kurven sind symmetrisch zu den vorigen in bezug auf die Gerade $z_2 = \frac{z_0}{2}$, Doppelpunkt auf der Geraden $z_2 = z_0$.

6) $\cos v_1 = \pm 1$. Der Verlauf dieser singulären Kurven ist ganz ähnlich den unter 5) dargelegten; sie haben nur die besondere Eigenschaft, dass $(z_2)_m$ hier seinen grössten resp. kleinsten von allen möglichen Werten annimmt.

4. Die geodätischen Linien der Complementärfläche und das gegenseitige Entsprechen der Rotationsfläche und ihrer Complementärfläche.

Wir dürfen unsere Betrachtungen über die Fläche nicht schliessen, ohne auf diejenigen geodätischen Linien und deren orthogonale Trajektorien einzugehen, in bezug auf welche die neue Fläche die Complementärfläche der pseudosphärischen Rotationsfläche vom elliptischen Typus ist. Wir wollen also im folgenden die Gleichung der geodätischen Linien und ihrer orthogonalen Trajektorien auf der Rotations- und ihrer Complementärfläche aufstellen, sodann diese Differentialgleichung integrieren und endlich im Anschluss daran das gegenseitige Entsprechen der beiden Flächen charakterisieren.

Es war (vgl. S. 14) mit w_1 der Winkel bezeichnet, welchen die geodätischen Linien auf der Fläche mit den Krümmungslinien $v = \text{const.}$ (den Meridiankurven der Rotationsfläche)

bilden. Da nun das Linienelement der Kurven $u = \text{const.}$ gleich $\sin w\, dv$, das der Kurven $v = \text{const.}$ gleich $\cos w\, du$ ist, so folgt: $\operatorname{tg} w_1 = \frac{\sin w\, dv}{\cos w\, du}$, also erhält man für die geodätischen Linien der Rotationsfläche die Gleichung:

A. $$\sin w_1 \cos w\, du - \cos w_1 \sin w\, dv = 0 \;[1]).$$

Die orthogonalen Trajektorien berechnen sich nach der Formel

$$(EN - FM)\, du + (FN - GM)\, dv = 0,$$

wo die Differentialgleichung der geodätischen Linien die Form $M du + N dv = 0$ hat[2]). Man erhält für die orthogonalen Trajektorien der geodätischen Linien die Differentialgleichung:

B. $$\cos w_1 \cos w\, du + \sin w_1 \sin w\, dv = 0.$$

Um nun für die Complementärfläche die entsprechenden Formeln abzuleiten, beachten wir folgendes: Es seien für den Augenblick $r_1\, r_2$ die Hauptkrümmungshalbmesser einer der den beiden Flächen S, S_1 gemeinsamen Evolventenfläche Σ; α, β die Parameter der Krümmungslinien auf Σ; die den Kurven α auf S, den Kurven β auf S_1 entsprechenden Kurven sind geodätische Linien; die den Kurven $r_1 = \text{const.}$, $r_2 = \text{const.}$ entsprechenden Kurven auf S und S_1 sind dort die orthogonalen Trajektorien der geodätischen Linien. Ist nun die Evolventenfläche eine W-Fläche, so fallen die Kurven $r_1 = \text{const.}$, $r_2 = \text{const.}$ zusammen; daraus folgt: Die orthogonalen Trajektorien der geodätischen Linien auf S und S_1 sind entsprechende Kurven.

Also gilt für diese Kurven auf S_1 auch die Gleichung B und man kann nach der bekannten Formel die Gleichung ihrer orthogonalen Trajektorien d. h. die Gleichung der geodätischen Linien auf S_1 ableiten und erhält:

C. $$\cos w_1 \sin w\, du - \sin w_1 \cos w\, dv = 0.$$

Aus der letzten Gleichung folgt: $\operatorname{tg} w = \frac{\sin w_1\, dv}{\cos w_1\, du}$ d. h.: Die geodätischen Linien bilden mit den Kurven u den Winkel

---

1) Diese Gleichung, sowie auch die Gleichungen B, C, A_1, B_1, C_1, G auf S. 37, 38, 39 gelten allgemein für jede pseudosphärische Fläche und ihre Complementärfläche. Bianchi, D.-G. S. 457 f.

2) Bianchi, D.-G. S. 66.

$\frac{\pi}{2} - w$. Da nun w allein Funktion von u ist, so folgt, dass längs jeder Krümmungslinie u die Grenzkreise alle unter demselben Winkel w schneiden, die Krümmungslinien u mithin die isogonalen Trajektorien der Grenzkreise (oder der geodätischen Linien) sind. Umgekehrt können wir sagen: Giebt es parallele geodätische Linien auf einer pseudosphärischen Fläche, deren Winkel mit den Krümmungslinien u längs jeder Krümmungslinie constant $= \frac{\pi}{2} - w$ ist, und bildet man in bezug auf diese die Complementärfläche, so wird dieselbe eine Rotationsfläche, für die $E = \cos^2 w$, $G = \sin^2 w$ ist und die ursprüngliche Fläche ist eine Ennepersche (vgl. S. 5).

Wir gehen jetzt zur Integration der Gleichungen A, B, C über. Für die Gleichung A kann man das allgemeine Integral sogleich angeben, wenn man bedenkt, dass man es mit geodätischen Linien auf Rotationsflächen zu thun hat und den für diese Kurven geltenden Clairautschen Satz berücksichtigt, dass nämlich das Produkt aus dem Radius des Parallelkreises und dem Cosinus des Winkels, welchen die geodätische Linie mit dem Parallelkreis bildet, längs der geodätischen Linie constant ist. Das allgemeine Integral von A ist also, wie man auch leicht verificieren kann:

$$\text{D.} \qquad \sin w \cdot \sin w_1 = \tau \cdot \frac{c_1}{R},$$

wo τ eine willkürliche Constante ist.

Unter Berücksichtigung der Formeln (29) S. 14 findet man durch eine leichte Rechnung das allgemeine Integral der Gleichungen B und C in der Form:

$$\text{E.} \qquad \sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1 = e^{-\frac{\psi}{R}},$$

$$\text{F.} \qquad \cos w \cos v_1 - \int_0^u \sin^2 w \frac{du}{R} = \frac{\tau_1}{R},$$

wo ψ, τ_1 willkürliche Constante sind.

Mit Hilfe der Formeln D, E, F kann man A, B, C schreiben:

$$\text{A}_1. \qquad \sin w_1 \cos w \, du - \cos w_1 \sin w \, dv = e^{\frac{\psi}{R}} d\tau,$$

$$B_1. \qquad \cos w_1 \cos w \, du + \sin w_1 \sin w \, dv = d\psi,$$

$$C_1. \qquad \cos w_1 \sin w \, du - \sin w_1 \cos w \, dv = e^{\frac{\psi}{R}} \, d\tau_1.$$

Aus diesen Formeln erhält man durch Quadrieren und Addieren:

$$G. \qquad \begin{cases} \cos^2 w \, du^2 + \sin^2 w \, dv^2 = d\psi^2 + e^{\frac{2\psi}{R}} \, d\tau^2, \\ \cos^2 w_1 du^2 + \sin^2 w_1 dv^2 = d\psi^2 + e^{\frac{2\psi}{R}} \, d\tau_1^2. \end{cases}$$

Man hat also damit das Linienelement der Rotationsfläche und ihrer Complementärfläche auf die geodätischen Linien und ihre orthogonalen Trajektorien transformiert, also auf die Normalform vom parabolischen Typus gebracht.

Diese Form des Linienelementes kann man dazu benutzen, die allgemeine Gleichung der geodätischen Linien aufzustellen, in der Weise, wie es A. Wangerin in dem Aufsatz: „Ueber die Abwickelung von Flächen constanten Krümmungsmasses, Festschrift zum 200jährigen Jubiläum der Universität Halle“ gethan hat. Durch die Formeln G ist die Complementärfläche so auf die Pseudosphäre abgewickelt, dass den geodätischen Linien die Meridiankurven, den orthogonalen Trajektorien die Parallelkreise entsprechen; da bei dieser Abwickelung die geodätischen Linien der einen Fläche in die der andern übergehen, so ergiebt sich, wenn man die geodätischen Linien der Pseudosphäre als bekannt annimmt, für die geodätischen Linien auf der Complementärfläche die Gleichung:

$$R^2\left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w \cos v_1\right)^2 \\ + \left(R \cos w \cos v_1 - \int_0^u \sin^2 w \, du - \varphi_1\right)^2 = C_1^2,$$

wo φ_1, C_1 willkürliche Constante sind.

Wir wollen jetzt den Verlauf der geodätischen Linien und im Anschluss daran das gegenseitige Entsprechen der beiden Flächen ins Auge fassen. Die pseudosphärische Rotationsfläche vom elliptischen Typus besteht bekanntlich aus zwei Teilen, welche in einem singulären Punkt (Wendepunkt jeder Meridiankurve) zusammenhängen; die in der Entfernung $\frac{z_0}{2}$ vom singulären Punkt liegenden Parallelkreise sind Kanten

der Fläche; die Wendetangente d. h. die Tangente der Meridiankurve in ihrem Wendepunkt bildet mit der X_2-Axe einen Winkel μ_1, wo $\operatorname{tg}\mu_1 = \left(-\frac{\cos w}{\sqrt{\sin^2 w + c_1}}\right)_{u_1 = \omega'} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}$. Daraus folgt, was hier nur nebenbei bemerkt sei, je nachdem $c_1 >$, $<$ oder $= \frac{1}{3}$, also $\mu_1 <$, $>$ oder $= 60^0$ ist, ist der Grenzwinkel $\varphi_0 <$, $>$ oder $= \pi$.

In einem beliebigen Punkt der Rotationsfläche sei der Winkel w_1, welchen die durch den Punkt hindurchgehende geodätische Linie der Schar mit der Meridiankurve bildet, gleich 0, in diesem Punkt fällt also ihre Richtung mit der Richtung des Meridians zusammen; da aber durch einen Punkt und die Richtung eine ganz bestimmte geodätische Linie gegeben ist, so fällt diese geodätische Linie der Schar überhaupt mit dem Meridian zusammen; wir wollen sie kurz die „erste geodätische Linie der Schar“ nennen, für sie ist $\sin w_1 = 0$, $v_1 = 0$; auf der Complementärfläche entsprechen allen geodätischen Linien, welche mit Meridiankurven zusammenfallen, die singulären Kurven $v_1 = 0, \pi \cdots$.

Für diese Kurven ergiebt sich daraus eine einfache Konstruktion: Trägt man auf jeder Tangente der Meridiankurve vom Berührungspunkt aus das constante Stück R ab, so bilden die Endpunkte die verlangte Kurve, gleichzeitig findet man, dass die Wendetangente auch Tangente der Kurven $v_1 = 0, \pi \cdots$ ist, denn für $\cos v_1 = \pm 1$, $\sin w = 0$ ist (nach d. S. 29) $\frac{dz_2}{dx_2} = \pm \frac{1}{\sqrt{c_1}}$ (vgl. die Figur 12).

Für die Rotationsfläche genügte es, v in einem solchen Intervall zu betrachten, dass $0 < v_2 < 2\pi$, für die Complementärfläche dagegen so, dass $0 < v_1 < \pi$ ist. Um nun das gegenseitige Entsprechen der beiden Flächen studieren zu können, muss man sich die Rotationsfläche aus mehreren übereinander gelagerten Blättern bestehend denken, welche alle längs der als Anfangs- oder Nullmeridian gewählten Kurve zusammenhängen und die Meridiankurven von dieser Anfangskurve aus fortlaufend gezählt denken, d. h. also so, dass, wenn ein Meridian durch ein gewisses v (v_2) charakterisiert ist, und man beschreibt einen vollen Umlauf um die Fläche, der jetzt gewonnene Meridian, welcher also thatsächlich mit dem ersten

zusammenfällt, einem Werte $2\pi \frac{R}{\sqrt{c_1+1}} + v$ $(v_2 + 2\pi)$ entspricht; in diesem Sinne kann man auch z. B. von einem Meridian $v_1 = \pi$ reden, selbst wenn derselbe erst nach einer Anzahl von Umläufen vom Nullmeridian aus erreicht wird.

Eine Diskussion der Formel $\sin w \sin w_1 = \tau \frac{c_1}{R}$ giebt für die geodätischen Linien der Rotationsfläche folgenden Verlauf: Jeder Parallelkreis wird von den geodätischen Linien (ausgenommen von denjenigen, welche mit Meridiankurven zusammenfallen) in zwei reellen, imaginären oder zusammenfallenden Punkten geschnitten; und zwar werden die singulären Parallelkreise von allen geschnitten; die geodätischen Linien bewegen sich dann zum singulären Punkt hin, erreichen ihn aber nicht, sondern berühren den dem Werte $\sin w = \tau \frac{c_1}{R}$ entsprechenden Parallelkreis und laufen zum singulären Parallelkreis zurück; es muss natürlich $\tau \frac{c_1}{R} < 1$ sein, ist $\tau \frac{c_1}{R} = 1$, so ist sowohl $\sin w = 1$ als auch $\sin w_1 = 1$; diesem Werte entspricht der Punkt des singulären Parallelkreises, für welchen $\sqrt{c_1 + 1} \cos v_1 + 1 = 0$ ist. Den Punkten der Parallelkreise, für die $\cos w_1 = 0$ ist, in denen also eine geodätische Linie berührt, entsprechen auf der Complementärfläche die Punkte der singulären Kurve. Aus dem Gesagten folgt: Abgesehen von den geodätischen Linien, welche mit Meridianen zusammenfallen, verlaufen alle ganz auf der einen oder ganz auf der andern Hälfte der Fläche. Ordnet man nun einem Punkte $u_1 v_1$ der einen Hälfte einen Punkt $2\omega' - u_1$, $\pi - v_1$ der andern Hälfte zu und lässt den einen eine geodätische Linie durchlaufen, so durchläuft auch der zweite eine geodätische Linie und zwar ist für ihn $\sin w \sin w_1 = -\tau \frac{c_1}{R}$, wenn τ der Wert für die die erste Linie charakterisierende Constante ist. Einer geodätischen Linie der einen Hälfte entspricht also immer eine geodätische Linie der andern Hälfte. Dies ist der geometrische (innere) Grund für die „Symmetrie der Complementärfläche durch zweimalige Spiegelung“.

Die Rotationsfläche und ihre Complementärfläche entsprechen sich so, dass ein Punkt $u_1 v_1$ der einen, einem zu

denselben Argumentwerten gehörigen Punkt $u_1 v_1$ der andern zukommt; also dem Teil der Complementärfläche zwischen den beiden ebenen Krümmungslinien $u_1 = 0,\ 2\omega'$ entspricht die Rotationsfläche zwischen den singulären Parallelkreisen.

Über das Entsprechen der Kurven v können wir folgendes aussagen. Eine volle Rotationsfläche rechnen wir von $v_2 = 0$ bis $v_2 = 2\pi$, $\left(\text{für } v_2 = 2\pi \text{ wird } v_1 = 2\pi\sqrt{\frac{c_1}{c_1+1}}\right)$, eine volle Complementärfläche von $v_1 = 0$ bis $v_1 = \pi$, $\left(\text{für } v_1 = \pi \text{ wird } v_2 = \pi\sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}}\right)$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

1) $\infty > c_1 > \frac{1}{3}$, $1 < \sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}} < 2$. Einer vollen Rotationsfläche entspricht ein Stück der Complementärfläche bis zu einem Azimuth α, welches grösser als der Grenzwinkel φ_0 ist, einer vollen Complementärfläche nicht eine volle Rotationsfläche; die zweite geodätische Linie der Schar, welche mit einem Meridian zusammenfällt, wird erreicht, bevor ein voller Umlauf vollendet ist (für einen Wert $v_2 < 2\pi$).

2) $0 < c_1 < \frac{1}{3}$ und zwar sei $p < \sqrt{\frac{c_1+1}{c_1}} < p + 1$. Einer vollen Complementärfläche, deren Grenzwinkel φ_0 im p^{ten} Halbkreis liegt, entsprechen $\frac{p}{2}$ über einander liegende Blätter der Rotationsfläche; einer vollen Rotationsfläche ein Stück der Complementärfläche bis zu einem Azimuth $\alpha < \varphi_0$; die zweite geodätische Linie der Schar, welche gleichzeitig Meridian ist, wird nach $\frac{p}{2}$ Umläufen, also für einen Wert $v_2 > p \cdot \pi$ erreicht.

3) $c_1 = \frac{1}{3}$, $v_2 = 2v_1$. In diesem Falle entspricht eine volle Rotationsfläche genau einer vollen Complementärfläche, $\varphi_0 = \pi$, und die zweite geodätische Linie der Schar, welche mit einem Meridian zusammenfällt, deckt sich mit der ersten.

5. Numerische Berechnungen.

Um ein Modell dieser Fläche zu entwerfen, benutzt man am besten die Eigenschaft, dass ihre Krümmungslinien v alle in Ebenen durch eine Axe liegen; man muss also den Verlauf dieser Kurven dadurch erkennen zu können versuchen,

dass man einige Punkte numerisch berechnet; im allgemeinen wird es genügen, für die Werte $u_1 = 0,\ 2\omega',\ u_s,\ u_m,\ \omega'$ die Koordinaten zu berechnen. Wegen der angegebenen Symmetrien gehört zu einer Kurve v_1 immer eine andere $\pi - v_1$, welche das Spiegelbild der ersten gegen die Gerade $z_2 = \frac{z_0}{2}$ ist; man kann also v_1 auf das Intervall 0 bis $\frac{\pi}{2}$ beschränken.

Wir wollen jetzt den Gang der numerischen Berechnung, nach welcher die Kurven 1—5 und 1—5a gezeichnet sind, darlegen und die Resultate angeben.

Es wurde $c_1 = \frac{1}{3}$ gewählt, dann wird der Grenzwinkel $\varphi_0 = \pi$. Unter dieser Voraussetzung wurde sodann nach H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze etc., Art. 45, Form. 3—17 z_0 berechnet.

Unter Annahme der Bezeichnungen dieses Artikels ergab sich:

$$e_1 - e_2 = 1,\ e_2 - e_3 = \tfrac{4}{3},\ e_1 - e_3 = \tfrac{1}{3};\ e_1 = \tfrac{7}{9},\ e_2 = -\tfrac{2}{9},\ e_3 = -\tfrac{5}{9}$$

$$l = 0{,}035\,9541,$$

$$l < \tfrac{4}{100},\ l^2 < \tfrac{16}{10\,000},\ l^4 < \tfrac{256}{10^8},\ l^4 \text{ ist also zu vernachlässigen.}$$

$$h \doteq 0{,}017\,977,$$

$$\omega_1 = 1{,}459\,9,\quad \frac{\omega_3}{i} = 1{,}867\,46,\quad \eta_1 = 0{,}567\,775,$$

$$\eta_3 = \frac{1}{i}\cdot 0{,}349\,685$$

und endlich $z_0 = -1{,}910\,13$.

Es wurden sodann von einigen Kurven die den Werten $u_1 = 0,\ 2\omega',\ u_s,\ u_m,\ \omega'$ entsprechenden Koordinaten berechnet. Dazu wurden folgende Kurven gewählt: 1) die symmetrische, dem Werte $\cos v_1 = 0$ entsprechende, 2) und 3) zwei Kurven mit Spitze, welche dem Werte

$$\cos v_1 = -\tfrac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{also } v_1 = 90 + 30^0,\ 90 + 45^0$$

entsprechen, 4) die Grenzkurve

$$\cos v_1 = -\frac{1}{\sqrt{c_1 + 1}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ v_1 = 90 + 60^0$$

und endlich die singuläre Kurve $\cos v_1 = -1,\ v_1 = \pi$.

Das Azimuth dieser Kurven v, der Winkel, welchen die Tangente in der Spitze mit der X_2-Axe bildet, die x_2-Koordinaten der Punkte und auch die z_2-Koordinate für $u_1 = \omega'$ ergeben sich ohne Schwierigkeit aus den bekannten Formeln. Allein die z_2-Koordinaten für u_s und u_m erfordern eine längere Rechnung. Man muss nach Art. 49 der „Formeln und Lehrsätze" Formel 2*, 3*, 4* die zu den Werten der $\wp$-Funktion zugehörigen Werte der Argumente u berechnen und sodann z aus Art. 8, Formel 11; z_2 erhält man dann ohne Schwierigkeit.

Zusammengefasst erhält man für die fünf Kurven die folgenden Koordinaten; die den Werten $u_1 = 0,\ 2\omega',\ u_s,\ u_m,\ \omega'$ entsprechenden Punkte seien mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet.

1) $\cos v_1 = 0,\ v_1 = \frac{\pi}{2};\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$

1) 0,5, 0,

2) 0,5, $z_0 = -1{,}910\,13$,

3)
4) } 1, $\frac{z_0}{2}$.
5)

2) $\cos v_1 = -\frac{1}{2},\ v_1 = \frac{\pi}{2} + 30^0;\ \varphi \doteq \frac{\pi}{2} + 43^0\,53'\,53''.$

1) 0,799 9, 0,

2) 0,314 5, z_0,

3) 1,040 9, $-0{,}484\,69$,

4) 1,028 45, $-0{,}4608$,

5) 0,901 38, $-0{,}522$.

3) $\cos v_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ v_1 = \frac{\pi}{2} + 45^0;\ \varphi = \frac{\pi}{2} + 63^0\,26'\,6''.$

1) 1,019 8, 0,

2) 0,245 2, z_0,

3) 1,118, $-0{,}228\,28$,

4) 1,102, · ·

5) 0,790 5, $-0{,}342\,6$.

4) $\cos v_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $v_1 = \frac{\pi}{2} + 60^0$, $\varphi = \frac{\pi}{2} + 79^0\,6'\,24''$.

1) 1,3229, 0,
2) 0,189, z_0,
3) fällt mit 1) zusammen,
4) 1,1495, + 0,0673,
5) 0,6614, − 0,205.

5) $\cos v_1 = -1$, $v_1 = \pi$, $\varphi = \varphi_0 = \pi$.

1) 1,866, 0,
2) 0,13398, z_0,
3) fehlt.
4) 1,32287, 0,492,
5) 0,5, − 0,089.

III. Complementärfläche der pseudosphärischen Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus.

Nehmen wir in der Formel (24), S. 16 $c > 0$ an, so erhalten wir die Complementärfläche der pseudosphärischen Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus; für diese Fläche sollen jetzt die analogen Betrachtungen durchgeführt werden.

1. Formeln.

$c > 0$. Nach einer Bemerkung auf S. 13 muss $c \leqq 1$ sein.

$$\frac{\sqrt{c}}{R} v = v_1, \qquad \frac{\sqrt{1-c}}{R} \cdot v = v_2. \tag{1}$$

$$t_1 = -\frac{\sin w + \sqrt{\sin^2 w - c}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\cos h \frac{v_1}{2}}{\sin h \frac{v_1}{2}}, \tag{2}$$

$$t_1^2 = \frac{\sin w + \sqrt{\sin^2 w - c}}{\sin w - \sqrt{\sin^2 w - c}} \cdot \frac{\cos h^2 \frac{v_1}{2}}{\sin h^2 \frac{v_1}{2}}.$$

$$\left\{\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-c}} \cos h\, v_1 \cos v_2 + \frac{1}{\sqrt{c}} \sin h\, v_1 \sin v_2, \\ V_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-c}} \cos h\, v_1 \sin v_2 - \frac{1}{\sqrt{c}} \sin h\, v_1 \cos v_2. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$(4)\qquad V_1^2 + V_2^2 = \frac{c + \sin h^2 v_1}{c(1-c)}.$$

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{R\cdot c\cdot V_1}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{R\cdot c\cdot V_2}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1}, \\[2ex] z_1 = z + \dfrac{R\cos w}{\sqrt{1-c}}\cdot\dfrac{\sqrt{\sin^2 w - c}\cos h v_1 + \sin w}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1}, \end{cases}$$

$$z = -\int \frac{\cos^2 w}{\sqrt{1-c}}\,du.$$

$$(6)\qquad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = R\cdot\sqrt{\frac{c}{1-c}}\cdot\frac{\sqrt{c + \sin h^2 v_1}}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1}.$$

$$(7)\qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{V_2}{V_1},\quad \cos\varphi_1 = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}},\quad \sin\varphi_1 = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}.$$

$$(8)\qquad \begin{cases} E_1 = \cos^2 w_1 = \left[-\dfrac{\sqrt{\sin^2 w - c}\cdot\cos h v_1 + \sin w}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1}\right]^2, \\[2ex] G_1 = \sin^2 w_1 = \left[-\dfrac{\sqrt{c}\,\sin h v_1}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1}\right]^2. \end{cases}$$

Die Formeln (31), (32), (33), S. 18, gelten auch für diese Fläche.

2. Berechnung der elliptischen Integrale.

Setzt man wiederum zur Abkürzung $\frac{ui}{R} = u_1$, bezeichnet wiederum mit 2ω, $2\omega'$ die zu der Funktion $s = \wp(u_1 + \omega)$ gehörenden Perioden, von denen 2ω reell, $2\omega'$ rein imaginär ist, so erhält man:

$$\begin{cases} -\cos^2 w = \wp(u_1 + \omega) - e_1 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma}(u_1 + \omega), \\[1ex] \sin^2 w - c = \wp(u_1 + \omega) - e_2 = \dfrac{\sigma_2}{\sigma}(u_1 + \omega), \\[1ex] \sin^2 w = \wp(u_1 + \omega) - e_3 = \dfrac{\sigma_3}{\sigma}(u_1 + \omega). \end{cases}$$

$$e_1 - e_2 = 1 - c,\quad e_1 - e_3 = 1,\quad e_2 - e_3 = c.$$

$$e_1 = \frac{2-c}{3},\quad e_2 = -\frac{1-2c}{3},\quad e_3 = -\frac{1+c}{3},$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{1-c}}\int \cos^2 w\, du = -\frac{Ri}{\sqrt{1-c}}\int (\wp(u_1+\omega)-e_1)\,du_1$$
$$= \frac{Ri}{\sqrt{1-c}}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1+\omega)+e_1 u_1-\eta_1\right\},$$

wo $\eta_1 = \frac{\sigma'}{\sigma}\omega$ bedeutet.

Damit z reell bleibt, darf u_1 nur rein imaginäre Werte annehmen. Wir müssen jetzt wiederum über die Vorzeichen von $\sin w$, $\cos w$, $\sqrt{\sin^2 w - c}$ eine Entscheidung treffen. $\sin^2 w$ wird, welche imaginäre Werte u_1 auch annehmen mag, niemals gleich 0, daher hat $\sin w$ stets dasselbe Zeichen, etwa das positive. $\sqrt{\sin^2 w - c}$ habe im Intervall $-\omega'$ bis $+\omega'$ das positive Zeichen, also im Intervall $-2\omega'$ bis $-\omega'$, $+\omega'$ bis $+2\omega'$ das negative. Das Vorzeichen von $\cos w$ ist dann bestimmt; da nämlich $\frac{d}{du}\sqrt{\sin^2 w - c} = \frac{1}{R}\sin w \cos w$, $\sin w > 0$ ist und $\sqrt{\sin^2 w - c}$ für das Intervall von u_1 von 0 bis $+2\omega'$ stets abnimmt von $+\sqrt{1-c}$ bis $-\sqrt{1-c}$, so muss in diesem Intervall $\cos w < 0$ sein. Wir erhalten zusammenfassend folgende Tabelle:

Bewegt sich u_1 von $-2\omega'$ bis $-\omega'$, $-\omega'$ bis 0,
0 bis $+\omega'$, $+\omega'$ bis $+2\omega'$,

so bewegt sich $\sin w$ von $+1$ bis $+\sqrt{c}$, $+\sqrt{c}$ bis $+1$,
$+1$ bis $+\sqrt{c}$, $+\sqrt{c}$ bis $+1$,

so bewegt sich $\cos w$ von 0 bis $+\sqrt{1-c}$, $+\sqrt{1-c}$ bis 0,
0 bis $-\sqrt{1-c}$, $-\sqrt{1-c}$ bis 0,

so bewegt sich $\sqrt{\sin^2 w - c}$ von $-\sqrt{1-c}$ bis 0, 0 bis $+\sqrt{1-c}$,
$+\sqrt{1-c}$ bis 0, 0 bis $-\sqrt{1-c}$.

Hierbei ist $R > 0$ vorausgesetzt. Hätten wir $R < 0$ angenommen, so würden wir dieselbe Fläche erhalten haben, nur gespiegelt gegen die XZ- und YZ-Ebenen.

Das Intervall von u_1 können wir, wie aus den vorhergehenden Ausführungen folgt, auf $-2\omega'$ bis $+2\omega'$ beschränken.

3. Diskussion der Fläche.

Aus den Formeln auf S. 45, 46 erhalten wir für diese neue Fläche die folgenden Ergebnisse:

1) Die Krümmungslinien v liegen in Ebenen, welche alle durch eine Axe, die Flächenaxe, gehen.

2) Die Kurven $v_1 = 0$, $\sqrt{\sin^2 w - c} \cos h v_1 + \sin w = 0$ sind singuläre Kurven der Fläche. Unter allen Kurven v befindet sich also in diesem Falle nur eine singuläre Kurve, weil $\sin h v_1$ nur für $v_1 = 0$ gleich 0 wird.

3) Die beiden Krümmungslinien u_1, welche den Werten $u_1 = 0, + 2\omega'$ entsprechen, liegen in zwei, einander parallelen und zur Flächenaxe, der Z-Axe, senkrechten Ebenen, welche die Fläche rechtwinklig schneiden; diese Kurven sind also gleichzeitig geodätische Linien auf der Fläche. Die XY-Ebene und alle im Abstande $z_0 = \frac{Rc}{\sqrt{1-c}} \{2 e_1 \omega' + 2\eta_3\}$ sind Symmetrieebenen der Fläche. Wir beschränken daher das Intervall auf $0 \cdots 2\omega'$.

4) Die XZ-Ebene ist eine Symmetrieebene der Fläche. Hier tritt ein wesentlicher Unterschied mit der ersten Fläche auf: Da $\sin h v_1$ keine reelle Periode besitzt, so giebt es unter den Kurven v_1 nicht nur, wie schon bemerkt, eine einzige singuläre Kurve ($v_1 = 0$), sondern auch nur eine, und zwar die demselben Werte ($v_1 = 0$) entsprechende Kurve, deren Ebene eine Symmetrieebene der Fläche ist. Wir können hier also nicht, wie bei der ersten Complementärfläche, das Intervall von v_1 beschränken, sondern müssen v_1 von 0 bis ∞ variieren lassen. Aus den angeführten Gründen fällt bei dieser Fläche auch die „Symmetrie durch zweimalige Spiegelung" fort, welche für die erste Fläche sich ergab.

5) Die Krümmungslinien $u = \text{const.}$ Aus den beiden Gleichungen:

$$x_1^2 + y_1^2 + \left(z_1 - z + \frac{R\sqrt{\sin^2 w - c} \cdot \sin w}{\sqrt{1-c} \cdot \cos w}\right)^2 = \frac{R^2}{\cos^2 w},$$

$$X_1 \cdot x_1 + Y_1 \cdot y_1 + Z_1 \left(z_1 - z + \frac{R \cdot \sqrt{\sin^2 w - c} \sin w}{\sqrt{1-c} \cdot \cos w}\right) = 0$$

folgt:

Die Krümmungslinien $u = \text{const.}$ liegen auf Kugeln, welche die Fläche orthogonal schneiden, deren Mittelpunkte auf der Z-Axe in der Entfernung $z - \frac{R\sqrt{\sin^2 w - c}\,\sin w}{\sqrt{1-c}\,\cos w}$ liegen und deren Radien gleich $\frac{R}{\cos w}$ sind. Die Radien sind also $\leqq \infty$ und $\geqq \frac{R}{\sqrt{1-c}}$; die z-Koordinate des Mittelpunktes als Funktion von u hat die Form: $\frac{Rc}{\sqrt{1-c}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}u_1 + e_1 u_1\right)$.

Da die geodätische Krümmung der Kurven $u = \text{const.}$, $g_u = -\frac{\cos w}{R}$ ist, so folgt: Die Krümmungslinien u besitzen constante geodätische Krümmung und zwar ist der Radius der geodätischen Krümmung dem absoluten Betrage nach gleich dem Radius der Kugel, auf welcher die Kurve liegt. g_u erreicht für $u_1 = \omega'$ den kleinsten Wert $\frac{\sqrt{1-c}}{R} < \frac{1}{R}$, die Kurve $u_1 = \omega'$ ist hier also kein Grenzkreis.

6) Die beiden besonderen Kurven $u_1 = 0,\ 2\omega'$. Wir bilden zunächst die zur Discussion nötigen Formeln, wobei von den beiden Vorzeichen in den folgenden Formeln das obere für die Kurve $u_1 = 0$, das untere für die Kurve $u_1 = 2\omega'$ gelten soll:

a. $x_1 = \frac{Rc\cdot V_1}{\cos h v_1 \pm \sqrt{1-c}},\quad y_1 = \frac{Rc\cdot V_2}{\cos h v_1 \pm \sqrt{1-c}},\quad z_1 = 0$ resp. z_0.

b. $$\begin{cases} \dfrac{dV_1}{dv} = \dfrac{1}{R}\sin h v_1 \cos v_2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{c(1-c)}}. \\[2ex] \dfrac{dV_2}{dv} = \dfrac{1}{R}\sin h v_1 \sin v_2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{c(1-c)}}. \end{cases}$$

c. $$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\pm\sin v_2 + \cos h v_1 \sin v_2 \sqrt{1-c} + \sin h v_1 \cos v_2 \sqrt{c}}{\pm\cos v_2 + \cos h v_1 \cos v_2 \sqrt{1-c} - \sin h v_1 \sin v_2 \sqrt{c}}.$$

d. $$\frac{d}{dv}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right) = \frac{1}{(\text{Nenner})^2 R}\left(\cos h v_1 \pm \sqrt{1-c}\right) \cdot \left\{\cos h v_1 \cdot \sqrt{1-c} \pm 1\right\}.$$

e. $$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = R\sqrt{\frac{c}{1-c}}\cdot\frac{\sqrt{c + \sin h^2 v_1}}{\cos h v_1 \pm \sqrt{1-c}}.$$

f. $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{V_2}{V_1}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}.$

g. $\frac{d\varphi_1}{dv} = \frac{\sqrt{1-c}\cdot\sin h^2 v_1}{R(c+\sin h^2 v_1)}, \quad \frac{dr_1}{dv} = \pm\frac{c\sin hv_1}{(\cos hv_1 \pm\sqrt{1-c})\sqrt{c+\sin h^2 v_1}}.$

h. Für $v_1 = 0$ wird $\frac{d^2 r_1}{dv^2} = \pm\frac{\sqrt{c}}{1\pm\sqrt{1-c}}.$

i. $\operatorname{tg}\mu = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sin hv_1}{\sqrt{c}}.$

k. Für $v_1 = \infty$ wird φ_1 unbestimmt, r_1 dagegen nähert sich dem Grenzwert $R\sqrt{\frac{c}{1-c}}$.

μ ist der Winkel, welchen die Tangente mit dem Radiusvector bildet, gleichzeitig aber auch der Winkel, unter welchem die Ebene v die Fläche schneidet[1]; die singuläre Kurve $v_1 = 0$ liegt in einer Tangentialebene der Fläche; für $v_1 = \infty$ wird $\mu = \frac{\pi}{2}$, daraus folgt: Die zu beliebig grossen Werten v_1 gehörenden Kurven v_1 werden sich beliebig wenig von einer geodätischen Linie der Fläche unterscheiden[2].

Aus Gleichung e. folgt: Das Produkt zweier entsprechender Radiivectoren der beiden Kurven $u_1 = 0,\ 2\omega'$ ist gleich $R^2\frac{c}{1-c}$, man kann nach dieser Formel die eine Kurve aus der andern punktweise konstruieren. Aus den Formeln a—k folgt:

Die Kurve $u_1 = 0$ liegt zwischen zwei concentrischen Kreisen mit den Radien $r_0 = R\sqrt{\frac{c}{1-c}}\cdot\frac{\sqrt{c}}{1+\sqrt{1-c}}$ und $r_0' = R\sqrt{\frac{c}{1-c}}$ $(r_0' > r_0)$ um den Nullpunkt, den kleinen Kreis trifft sie senkrecht in einer Spitze in der X-Axe und verläuft mit stets wachsendem r_1 spiralförmig, nähert sich also immer mehr dem grossen Kreise, welchen sie schliesslich asymptotisch berührt (vgl. Fig. 9).

1) Vgl. S. 28, 29.
2) Vgl. S. 26, Anm. 4.

Die Kurve $u_1 = 2\omega'$ liegt zwischen zwei concentrischen Kreisen mit den Radien $r_0 = R\sqrt{\frac{c}{1-c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{1-\sqrt{1-c}}$ und $r_0' = R\sqrt{\frac{c}{1-c}}$ $(r_0' < r_0)$ um den Nullpunkt, den grossen Kreis trifft sie senkrecht in einer Spitze in der X-Axe und nähert sich mit stets abnehmenden r_1 dem kleinen Kreise, bis sie ihn asymptotisch berührt; für einen Wert v_1, für welchen $\cos h v_1 \cdot \sqrt{1-c} - 1 = 0$ ist, besitzt die Kurve einen Wendepunkt (vgl. Fig. 10).

7) Die asymptotische Fläche. Für beliebig grosses v_1 nähern sich alle Krümmungslinien u einem Kreise, für $v_1 = \infty$ wird nämlich:

$$r_1 = R\sqrt{\frac{c}{1-c}} \cdot \frac{1}{\sin w}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \text{ unbestimmt};$$

$$z_1 = z + \frac{R\cos w \cdot \sqrt{\sin^2 w - c}}{\sqrt{1-c} \cdot \sin w}$$
$$= \frac{Ri}{\sqrt{1-c}}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1 + \omega + \omega') + e_1 u_1 - \eta - \eta'\right\}.$$

Betrachtet man $r_1 z_1$ als die rechtwinkligen Koordinaten einer Kurve, so hat die durch Rotation dieser Kurve um die Z-Axe entstandene Fläche die Eigenschaft, dass sie von jeder Krümmungslinie u asymptotisch berührt wird; diese Fläche kann man also als die asymptotische Fläche der ersten bezeichnen.

Um diese Fläche etwas näher zu untersuchen, bilden wir $\frac{dr_1}{du}$, $\frac{dz_1}{du}$; es wird:

$$\frac{dr_1}{du} = -\sqrt{\frac{c}{1-c}} \cdot \frac{\cos w}{\sin^2 w}\sqrt{\sin^2 w - c},$$

$$\frac{dz_1}{du} = +\frac{1}{\sqrt{1-c}}\left(\wp(u_1 + \omega + \omega') - e_1\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-c}}\left(\frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp(u_1 + \omega) - e_3} + e_3 - e_1\right)$$

$$\frac{dz_1}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-c}} \cdot \frac{\sin^2 w - c}{\sin^2 w},$$

also wird:

$$\frac{dz_1}{dr_1} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 w - c}}{\cos w} = \sqrt{\frac{\frac{R^2}{1-c} - r_1^2}{r_1^2 - \frac{R^2 c}{1-c}}},$$

$$1 + \left(\frac{dz_1}{dr_1}\right)^2 = \frac{R^2}{r_1^2 - \frac{R^2 c}{1-c}}.$$

Die beiden letzten Formeln charakterisieren die Fläche als eine pseudosphärische Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus, deren Radius gleich R ist.

8) Die Krümmungslinien $v = \text{const.}$ Die Discussion der Krümmungslinien $v = \text{const.}$ gestaltet sich für diese Fläche einfacher und übersichtlicher als bei der ersten Complementärfläche. Wir bilden die Formeln, welche zur Diskussion nötig sind und transformieren zunächst wiederum auf die Ebene der Kurve:

$$x_2 = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi, \qquad y_2 = x_1 \sin\varphi - y_1 \cos\varphi,$$

$$x_2 = R\sqrt{\frac{c}{1-c}} \cdot \frac{\sqrt{c + \sin h^2 v_1}}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1},$$

$$y_2 = 0,$$

$$z_2 = z_1 = z + \frac{R \cos w}{\sqrt{1-c}} \cdot \frac{\sqrt{\sin^2 w - c} \cdot \cos h v_1 + \sin w}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1},$$

$$\frac{dx_2}{du} = \cos w \cdot \cos w_1 \frac{x_2}{R} = -\sqrt{\frac{c}{1-c}} \cdot \frac{\cos w \cdot \sqrt{c + \sin h^2 v_1} \cdot \left(\sqrt{\sin^2 w - c} \cos h v_1 + \sin w\right)}{\left(\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1\right)^2},$$

$$\frac{dz_2}{du} = \frac{\cos w_1}{\sqrt{1-c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1} \cdot \left\{\sqrt{\sin^2 w - c} \cdot \cos h v_1 + \sin w (1-c)\right\},$$

$$\frac{dz_2}{dx_2} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{\sin^2 w - c} \cdot \cos h v_1 + \sin w (1-c)}{\sqrt{c} \cdot \cos w \cdot \sqrt{c + \sin h^2 v_1}},$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{dz_2}{dx_2}\right) = \frac{(1-c) \cdot \left(\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1\right)}{R \cdot \sqrt{c} \cdot \cos^2 w \cdot \sqrt{c + \sin h^2 v_1}}.$$

Für $\cos w_1 = 0$ wird:

$$\frac{d^2 x_2}{du^2} = -\sqrt{\frac{c}{1-c}} \cdot \frac{\cos^2 w \cdot \sqrt{c + \sin h^2 v_1}}{R\left(\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1\right)},$$

$$\frac{d^2 z_2}{du^2} = \frac{c \sin w \cdot \cos w}{\sqrt{1-c} \cdot \left(\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1\right)}.$$

Für $\sqrt{\sin^2 w - c} \cos h v_1 + \sin w (1-c) = 0$ wird

$$\frac{d^2 z_2}{du^2} = \frac{\cos w_1 \ \cos w}{\sqrt{1-c} \cdot \left(\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1\right)} \cdot \left\{\sin w \cos h v_1 + \sqrt{\sin^2 w - c}\,(1-c)\right\}.$$

Es seien mit u_s resp. u_m die Werte bezeichnet, für welche $\cos w_1 = 0$ resp. $\sqrt{\sin^2 w - c} \cos h v_1 + \sin w (1-c) = 0$ wird, für die Grösse u_1 wollen wir das Intervall $0 \cdots 2\omega'$ annehmen, für dieses wird $\cos w < 0$. In analoger Weise, wie für die erste Fläche (S. 31), weisen wir nach, dass es in dem betrachteten Intervall stets einen und nur einen Wert u_m giebt, für $u_1 = u_m$ wird z_2 ein Minimum.

Der Maximalwert des Ausdruckes

$\sqrt{\sin^2 w - c} \cos h v_1 + \sin w$ ist $m_a = \sqrt{1-c} \cdot \cos h v_1 + 1$,

der Minimalwert $m_i = -\sqrt{1-c} \cos h v_1 + 1$; da $m_a > 0$ ist, so folgt: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Wert u_s existiert, oder dass es Kurven v_1 mit singulärem Punkt giebt, ist $m_i < 0$ oder $\cos h v_1 > \frac{1}{\sqrt{1-c}}$, für $u_1 = u_s$ wird x_2 ein Maximum, $z_2 =$ ein Maximum [1]); ferner ist

$$\omega' < u_s < 2\omega', \quad \omega' < u_m < 2\omega', \quad |(z_2)_s| > \left|\frac{z_0}{2}\right|; \quad |(z_2)_m| > \left|\frac{z_0}{2}\right|;$$

da der Ausdruck $A = \sqrt{\sin^2 w - c} \cos h v_1 + \sin w (1-c)$ für $u_1 = \omega'$ $A > 0$, für $u_1 = u_s$ $A < 0$, für $u_1 = u_m$ $A = 0$ wird, so folgt: Wenn u_1 nach einander alle Werte von ω' bis $2\omega'$ annimmt, so erreicht u_1 zuerst den Wert u_m

$$\omega' < u_m < u_s < 2\omega', \quad |(z_2)_m| > |(z_2)_s|.$$

Wir haben für die Kurven v_1 somit folgende Ergebnisse gewonnen, $0 < v_1 < \infty$ vorausgesetzt:

1) Der singuläre Punkt ist also eine Spitze von der Form 2, S. 33).

Die Krümmungslinien v_1 = const. zerfallen in zwei Gruppen; und zwar: ist $\infty \geqq \cos h v_1 \geqq \frac{1}{\sqrt{1-c}}$, so besitzen die diesen Werten entsprechenden Kurven eine Spitze, ist $\frac{1}{\sqrt{1-c}} > \cos h v_1 \geqq 1$, so besitzen diese Kurven v_1 keine Spitze. Unter allen Kurven v_1 giebt es drei besondere: 1) Die Kurve $v_1 = \infty$, welche symmetrisch zur Geraden $z_2 = \frac{z_0}{2}$ ist; 2) die dem Werte $\cos h v_1 = \frac{1}{\sqrt{1-c}}$ entsprechende Kurve, welche die Grenzkurve bildet zwischen den Krümmungslinien v_1 mit und denen ohne Spitze; 3) die zum Werte $\cos h v_1 = 1$ gehörige singuläre Kurve. Der Verlauf der Kurven ist folgender, ganz ähnlich den Kurven v_1 der zuerst betrachteten Fläche[1]), wenn u_1 von 0 bis $2\omega'$ sich bewegt:

1) $\infty > \cos h v_1 > \frac{1}{\sqrt{1-c}}$. z_2 nimmt ab, bis es für $u_1 = u_m$ sein Minimum $(z_2)_m < \frac{z_0}{2}$ erreicht (Tangente parallel der X_2-Axe), x_2 wächst, z_2 nimmt ab, bis beide für $u_1 = u_s$ in einer mit der positiven X_2-Axe einen spitzen, positiven Winkel bildenden, also nach oben gerichteten Spitze ihr Maximum erreichen; dann nehmen x_2, z_2 ab, bis für $u_1 = 2\omega'$ die Kurve die Gerade $z_2 = z_0$ senkrecht schneidet; der weitere Verlauf ergiebt sich durch Spiegelung gegen die X_2-Axe und alle im Abstande $z_2 = z_0$ parallel gezogenen Geraden.

2) $\cos h v_1 = \infty$. Nähert sich v_1 dem Werte ∞, so gehen die Kurven v_1 immer mehr in die Meridiankurven einer pseudosphärischen Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus und demselben Radius R über (Spitze in der Entfernung $\frac{z_0}{2}$ parallel der X_2-Axe).

3) $\cos h v_1 = \frac{1}{\sqrt{1-c}}$. Die Spitze fällt in die Gerade $z_2 = z_0$ und ist parallel zur positiven Z-Axe gerichtet, diese Kurve besitzt auf der Geraden $z_2 = z_0$ einen Doppelpunkt; unter den

1) Aus diesem Grunde sind diese Kurven nicht gezeichnet, obwohl numerische Berechnungen (vgl. S. 57 f.) ausgeführt sind.

Kurven v_1 muss es also auch solche geben, welche auf dieser Geraden zwei Doppelpunkte besitzen.

4) $\frac{1}{\sqrt{1-c}} > \cos h v_1 \geqq 1$. Bei beständig wachsendem x_2 nimmt z_2 zunächst ab bis zum Minimum $(z_2)_m$, sodann zu bis z_0, die Kurve besitzt einen Doppelpunkt auf der Geraden $z_2 = z_0$; die singuläre Kurve $v_1 = 0$ hat noch die Eigenschaft, dass $(z_2)_m$ hier den dem absoluten Betrage nach grösstmöglichen Wert annimmt.

4. Die geodätischen Linien der Complementärfläche und das gegenseitige Entsprechen der Rotationsfläche und ihrer Complementärfläche.

Die Gleichungen A, B, C auf S. 37 gelten, wie dort bereits bemerkt, auch für die neue Fläche. Die Integrale werden auf analoge Weise gewonnen, und wir erhalten für die Schar der parallelen geodätischen Linien auf der Rotationsfläche ihre orthogonalen Trajektorien, welche auch entsprechende Kurven auf der Complementärfläche sind, und für die Schar der geodätischen Linien auf der Complementärfläche die Gleichungen:

$$\text{a.} \quad \sin w \sin w_1 = \frac{\tau c}{R},$$

$$\text{b.} \quad \sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1 = e^{-\frac{\psi}{R}},$$

$$\text{c.} \quad \cos w \cos h v_1 - \int_0^u \sin^2 w \frac{du}{R} = \frac{\tau_1}{R}.$$

Die Gleichungen A_1, B_1, C_1, G, S. 38, 39, gelten unverändert.

Die allgemeine Gleichung der geodätischen Linien der Complementärfläche lautet:

$$R^2\left(\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h v_1\right)^2 + \left(R \cos w \cos h v_1 - \int_0^u \sin^2 w \, du - \varphi_1\right)^2 = C_1^2.$$

Unter den geodätischen Linien der Schar a. auf der Rotationsfläche giebt es eine und nur eine, welche mit einem Meridian zusammenfällt, die entsprechende Kurve auf der Complementärfläche ist die singuläre Kurve $v_1 = 0$; für diese

letzte Kurve ergiebt sich also wieder dieselbe Konstruktion (Fig. 13), wie für die entsprechenden Kurven (Fig. 12).

Für die Rotationsfläche genügte es, v in einem solchen Intervall zu betrachten, dass v_2 zwischen 0 und 2π lag, für die Complementärfläche aber müssen wir v im Intervall 0 bis ∞ nehmen. Um das gegenseitige Entsprechen der beiden Flächen studieren zu können, müssen wir wiederum annehmen, dass die Rotationsfläche aus über einander liegenden unendlich dünnen Blättern besteht, welche alle längs des Nullmeridians ($v_1 = 0$) zusammenhängen (vgl. S. 40f.). Der Unterschied gegenüber der ersten Fläche besteht nur darin, dass die Anzahl der Blätter hier unendlich gross ist, weil nur ein einziger Meridian mit einer geodätischen Linie der Schar zusammenfällt. Das gegenseitige Entsprechen der Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus und ihrer Complementärfläche ist also derartig, dass der Complementärfläche, welche nach unendlich vielen Windungen um die Z-Axe sich einer pseudosphärischen Rotationsfläche [1]) vom hyperbolischen Typus, von welcher ein singulärer Parallelkreis in der Ebene $z_2 = \frac{z_0}{2}$ liegt, asymptotisch nähert, unendlich viele über einander gelagerte, längs einer

1) Diese Rotationsfläche ist identisch mit der Ausgangsfläche, nur parallel zur XY-Ebene um $\frac{z_0}{2}$ verschoben, wie folgende Betrachtung lehrt: Bestimmen wir in den Formeln, S. 46 unten, die Integrationsconstante u_0 in $\wp(u_1 + u_0)$, so dass für $u = 0$ $\sin^2 w = c$ wird und bezeichnen diesen Winkel w mit w_0, so wird $\sin^2 w_0 = \wp(u_1 + \omega + \omega') - e_3$, $r = \frac{Rc}{\sqrt{1-c}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1 + \omega + \omega') + e_1 u_1 - \eta - \eta'\right)$; die Gleichung der Meridiankurve wird nach Formel (11), S. 12:

$$z = \frac{R}{\sqrt{1-c}} \sin w_0 = \frac{R}{\sqrt{1-c}} \left(\wp(u + \omega + \omega') - e_3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{1-c}} \cdot \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\wp(u + \omega) - e_3\right)^{\frac{1}{2}}} = R\sqrt{\frac{c}{1-c}} \cdot \frac{1}{\sin w},$$

$$z = \frac{Rc}{\sqrt{1-c}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(u_1 + \omega + \omega') + e_1 u_1 - \eta - \eta'\right),$$

dies sind aber die Gleichungen S. 51 unter (7); damit ist der Beweis erbracht.

Meridiankurve zusammenhängende, unendlich dünne Blätter der Rotationsfläche entsprechen.

5. Numerische Berechnungen.

In analoger Weise wie für die erste Fläche wurden auch für diese die numerische Berechnung einiger Punkte durchgeführt. Wir wollen die Resultate angeben (Formeln 1—17, Art. 45 der „Formelsammlung"):

$c_1 = \frac{1}{5}$ gewählt: $e_1 - e_3 = 1$, $e_1 - e_2 = \frac{4}{5}$, $e_2 - e_3 = \frac{1}{5}$,

$l = 0{,}027\,889$, $l < \frac{3}{100}$, $l^2 < \frac{9}{10\,000}$, schon l^2 wird wenig die Rechnungen beeinflussen.

$h = 0{,}013\,945$, $\omega_1 = 1{,}659\,9$, $\omega_3 = i \cdot 2{,}257\,6$, $\eta_1 = 0{,}493\,27$,

$z_0 = 2{,}412\,72$. $\eta_3 = -\,i \cdot 0{,}275\,54$,

Um ein ungefähres Bild von der mehr oder weniger schnellen Annäherung der Fläche an ihre Asymptotenfläche zu geben, seien für $v_1 = \pi$ die Differenzen $(x_2)_m - (x_2)_s$, $(x_2)_s = (x_2)_{\omega'}$ und das Azimuth φ berechnet, man fand

$$(x_2)_m - (x_2)_s = 0{,}000\,604 < \tfrac{7}{10\,000},\quad (x_2)_s - (x_2)_{\omega'} = 0{,}004\,1 < \tfrac{5}{1000},$$
$$\varphi = 120^0\,43'\,38''.$$

Zusammengefasst erhält man für die fünf Kurven die folgenden Koordinaten; die den Werten $u_1 = 0$, $2\omega'$, u_s, u_m, ω' entsprechenden Punkte seien mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet.

1) $\cos h v_1 = 1$, $\varphi = 0$.

1) 0,118, 0,

2) 2,118, $z_0 = -\,2{,}413$,

3) fehlt,

4) 1,5, $-\,2{,}974\,7$,

5) 0,5, $-\,2{,}206\,4$.

2) $\cos h v_1 = \frac{1}{\sqrt{1-c}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\varphi = 13^0\,13'\,30''$.

1) 0,166 7, 0,

2) } 1,5, z_0,
3) }

4) 1,301 8, $-\,2{,}494\,4$,

5) 0,670 8, $-\,2{,}100\,8$.

3) $\cos h v_1 = \cos h \frac{\pi}{6}$, $\varphi = 16^0\, 8'\, 24''$.

1) 0,1738, 0,
2) 1,4386, z_0,
3) 1,4433, — 2,317,
4) 1,2284, — 2,3819,
5) 0,6934, — 2,0834.

4) $\cos h v_1 = \cos h \frac{\pi}{4}$, $\varphi = 37^0\, 19'\, 12''$.

1) 0,2202, 0,
2) 1,1353, z_0,
3) 1,2574, — 2,1398,
4) 1,208, ...
5) 0,8248, — 1,9612.

5) $v_1 = \infty$.

1) 0,5, 0,
2) 0,5, z_0,
3), 4), 5) 1,118, $\frac{z_0}{2}$.

IV. Complementärfläche der Pseudosphäre als Grenzfall.

Setzen wir in den bisher aufgestellten Formeln $c = 0$, so erhalten wir die Formeln für die Complementärfläche der Pseudosphäre; diese sollen jetzt kurz durch Grenzübergänge abgeleitet werden.

Zunächst ist $\frac{dw}{du} = \frac{\sin w}{R}$, die Gleichung der Pseudosphäre (S. 12, Form. (11)):

$$x = R \sin w \cos \frac{v}{R},\ y = R \sin w \sin \frac{v}{R},\ z = -\int \cos^2 w\, du$$
$$= -R \cos w - R \log \operatorname{tg} \frac{w}{2}.$$

Wollen wir aus Gleichung (24), S. 16 die allgemeine Lösung für $c = 0$ ableiten, so müssen wir der willkürlichen

Constanten C_1 zunächst eine andere Form geben, weil sonst $t_1 = \infty$ würde. Setzen wir $C_1 = \frac{\sqrt{c_1}}{2R}\alpha - \frac{\pi}{2}$, wo jetzt α die willkürliche Constante ist, so wird Gleichung (24), S. 16

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w\right)\frac{\sin\frac{\sqrt{c_1}}{2R}(v+\alpha)}{\cos\frac{\sqrt{c_1}}{2R}(v+\alpha)}$$

und da $\lim\limits_{\varphi=0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$, $\lim\limits_{c_1=0} t_1 = \frac{(v+\alpha)}{R}\cdot\sin w_1$,

$$\cos w_1 = \frac{R^2 - (v+\alpha)^2\sin^2 w}{R^2 + (v+\alpha)^2\sin^2 w},\quad \sin w_1 = \frac{2R(v+\alpha)\sin w}{R^2 + (v+\alpha)^2\sin^2 w}.$$

Ist $\alpha = 0$, so wird $C_1 = -\frac{\pi}{2}$, wollen wir also aus den Gleichungen (27), (28), S. 17, durch Grenzübergang für $c_1 = 0$ die entsprechenden Gleichungen ableiten, so müssen wir zunächst in den Gleichungen statt v_1 überall $\pi - v_1$, also $-\cos v_1$ statt $\cos v_1$, $-\sin v_1$ statt $\sin v_1$ setzen, dann können wir den Grenzübergang ausführen und erhalten:

$$\lim_{c_1=0} V_1 = -\cos\frac{v}{R} - \frac{v}{R}\sin\frac{v}{R},\quad \lim_{c_1=0} V_2 = \sin\frac{v}{R} - \frac{v}{R}\cos\frac{v}{R},$$

$$\lim_{c_1=0}\left(\frac{c_1}{\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w\cos\frac{\sqrt{c_1}\,v}{R}}\right) = \frac{2}{\frac{1}{\sin w} + \frac{v^2}{R^2}\sin w},$$

$$x_1 = \frac{2R\sin w}{1 + \frac{v^2}{R^2}\sin^2 w}\left(\cos\frac{v}{R} + \frac{v}{R}\sin\frac{v}{R}\right),$$

$$y_1 = \frac{2R\sin w}{1 + \frac{v^2}{R^2}\sin^2 w}\left(\sin\frac{v}{R} - \frac{v}{R}\cos\frac{v}{R}\right),$$

$$z_1 = z + R\cos w\cdot\frac{-1 + \frac{v^2}{R^2}\sin^2 w}{+1 + \frac{v^2}{R^2}\sin^2 w}.$$

Für die elliptischen Funktionen wird nach Art. 10 der „Formelsammlung“ der Grenzübergang ausgeführt.:

$$e_1 = \frac{2}{3},\quad e_2 = e_3 = -\frac{1}{3},\quad g_2 = \frac{4}{3},\quad g_3 = \frac{8}{27},\quad \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = 1,$$

$$\omega = (\pm)\frac{\pi}{2},\quad \eta_1 = \frac{\pi}{6},$$

$$\sin^2 w = \wp\left(\frac{ui}{R} + \omega\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{\cos h^2 \frac{u}{R}}, \quad \sin w = (\pm) \cdot \frac{1}{\cos h \frac{u}{R}},$$

$$\cos w = \operatorname{tg} h \frac{u}{R},$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}\left(\frac{ui}{R} + \omega\right) = i \cdot \operatorname{tg} h \frac{u}{R} + \frac{1}{3}\left(\frac{ui}{R} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$z = \frac{Ri}{\sqrt{1-c}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\left(\frac{ui}{R} + \omega\right) + e_1 \frac{ui}{R} - \eta_1\right) = -R \operatorname{tg} h \frac{u}{R} - u.$$

Somit erhalten wir für die Complementärfläche der Pseudosphäre[1]) die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{2R \cos h \frac{u}{R}}{\cos h^2 \frac{u}{R} + \frac{v^2}{R^2}} \left(\cos \frac{v}{R} + \frac{v}{R} \cdot \sin \frac{v}{R}\right),$$

$$y_1 = \frac{2R \cos h \frac{u}{R}}{\cos h^2 \frac{u}{R} + \frac{v^2}{R^2}} \cdot \left(\sin \frac{v}{R} - \frac{v}{R} \cos \frac{v}{R}\right),$$

$$z_1 = -u - 2R \sin h \frac{u}{R} \cdot \frac{\cos h \frac{u}{R}}{\cos h^2 \frac{u}{R} + \frac{v^2}{R^2}}.$$

Da diese Gleichungen bereits bekannt sind, soll auf eine Diskussion nicht eingegangen werden.

V. Zusammenhang der pseudosphärischen Complementärflächen von Rotationsflächen mit den Enneperschen pseudosphärischen Flächen, welche eine Schar ebener Krümmungslinien besitzen.

In den „Nachrichten der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1868 und 1876“ hat Enneper die pseudosphärischen Flächen, welche eine Schar ebener Krümmungslinien besitzen, näher untersucht. Diese Flächen sind dadurch charakterisiert, dass $\operatorname{tg} \frac{w}{2} = e^{u_1 + v_1}$ ist, wo u_1 Funktion

---

1) Vergl. Bianchi, Math. Annalen Bd. XVI und Differential-Geometrie S. 469 f.

allein von u, v_1 allein von v und $2w$ der Winkel der Asymptotenlinien ist.

Über diese Flächen sind a. a. O. die folgenden Sätze aufgestellt:

1) Ist für eine pseudosphärische Fläche $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = e^{u_1+v_1}$, so liegt die eine Schar von Krümmungslinien in Ebenen, die andere auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden, und die geodätische Krümmung dieser Kurven ist constant[1]).

2) Besitzt eine pseudosphärische Fläche eine Schar ebener Krümmungslinien, so liegt die andere Schar auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden, die geodätische Krümmung dieser Kurven ist constant und für die Fläche gilt die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = e^{u_1+v_1}$.

3) Liegt die eine Schar von Krümmungslinien einer pseudosphärischen Fläche auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden, so ist ihre geodätische Krümmung constant, die andere Schar Krümmungslinien liegt in Ebenen und es ist $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = e^{u_1+v_1}$.

4) Hat die eine Schar von Krümmungslinien einer pseudosphärischen Fläche constante geodätische Krümmung, so liegt sie auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden, die andere Schar von Krümmungslinien liegt in Ebenen und es ist $\operatorname{tg}\frac{w}{2} = e^{u_1+v_1}$.

5) Zu diesen vier Sätzen kommt noch hinzu, dass die Ebenen der Krümmungslinien alle durch eine feste Gerade gehen und die Mittelpunkte der Kugeln auf dieser Geraden liegen; daher nennt man diese Gerade die Axe der Fläche. Der Radius der geodätischen Krümmung ist gleich dem Radius der osculierenden Kugel[1]).

Der Beweis der vorstehenden Sätze ergiebt sich ohne Schwierigkeit, wenn man etwas allgemeinere Formeln aufstellt; dazu seien folgende Bezeichnungen eingeführt: Es seien: a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' die Winkel, welche die Flächen-

---

*) Diese letzte Bemerkung findet sich dort nicht angegeben.

normale, Tangente der Krümmungslinien $v = \text{const.}$, Tangente der Krümmungslinien $u = \text{const.}$ mit den Axen bilden; $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$, $\lambda_2 \mu_2 \nu_2$ die Winkel, welche die Hauptnormalen, $l_1 m_1 n_1$, $l_2 m_2 n_2$ die Winkel, welche die Binormalen der Krümmungslinien mit den Axen bilden; $\varrho_1 \varrho_2$ die Krümmungsradien, $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ die Koordinaten des Mittelpunktes der osculierenden Kugel, $R_1 R_2$ die Radien derselben für die Krümmungslinien, $\delta_1 \delta_2$ die Winkel, welche die Flächennormale mit der Binormale der Krümmungslinien bildet, fernen seien

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

gesetzt, dann bestehen allgemein für jede Fläche folgende Gleichungen[1]):

$$(1) \quad \frac{1}{\varrho_1} = \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + H_1^2},$$

$$(2) \quad \frac{\cos \lambda_1}{\varrho_1} = \frac{\cos a}{r_1} - H_1 \cos a'',$$

$$(3) \quad \frac{\cos l_1}{\varrho_1} = H_1 \cos a + \frac{\cos a''}{r_1},$$

$$(4) \quad (\xi_1 - x) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} - H_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} \right) = \cos a \cdot \frac{\partial H_1}{\partial u} + \cos a'' \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u},$$

$$(5) \quad R_1^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} - H_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial H_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} \right)^2,$$

$$(6) \quad \cos \delta_1 = \varrho_1 H_1, \quad \sin \delta_1 = \frac{\varrho_1}{r_1}, \quad \cot \delta_1 = H_1 r_1.$$

$$(1a) \quad \frac{1}{\varrho_2} = \sqrt{\frac{1}{r_2^2} + H_2^2},$$

$$(2a) \quad \frac{\cos \lambda_2}{\varrho_2} = \frac{\cos a}{r_2} - H_2 \cos a',$$

$$(3a) \quad \frac{\cos l_2}{\varrho_2} = - H_2 \cos a - \frac{\cos a'}{r_2},$$

---

1) A. Enneper, Untersuchungen über die Flächen mit planen und sphärischen Krümmungslinien (Abhandlungen der königl. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen Bd. XXIII vom Jahre 1878). Die Ableitung der Gleichungen (1)—(6), (1a)—(6a) geschieht durch Anwendung der allgemeinen Formeln aus der Theorie der Raumkurven auf die Flächenkurven.

(4a) $(\xi_2 - x) \cdot \left(\frac{1}{r_2}\frac{\partial H_2}{\partial v} - H_2 \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\right) = \cos a \frac{\partial H_2}{\partial v} + \cos a' \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v},$

(5a) $R_2^2 \cdot \left(\frac{1}{r_2}\frac{\partial H_2}{\partial v} - H_2 \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial H_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v}\right)^2,$

(6a) $\cos \delta_2 = - \varrho_2 H_2, \ \sin \delta_2 = \frac{\varrho_2}{r_2}, \ \cot \delta_2 = - r_2 H_2.$

Ist eine Schar von Krümmungslinien, etwa $u = \text{const.}$, sphärisch, so muss R_2 Funktion allein von u sein, dann folgt aus Gleichung (5a) als notwendige und hinreichende Bedingung:

(7) $$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos \sigma}{r_2} + \sin \sigma \cdot H_2$$

und mithin

(8) $$\xi_2 = x + R_2 (\cos a \cos \sigma - \cos a' \sin \sigma),$$

wo σ allein Funktion von u ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Krümmungslinien v in Ebenen liegen, ist (9) $\cot \delta_1 = r_1 H_1$ allein Funktion von v.

Die Formeln (1) bis (9) gelten allgemein für Flächen; haben wir es mit pseudosphärischen Flächen zu thun, so so kommen noch folgende Bedingungen hinzu (vgl. S. 10):

(10) $E = \cos^2 w, \ G = \sin^2 w, \ r_1 = R \cot w, \ r_2 = - R \operatorname{tg} w;$

(11) $$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \frac{1}{R^2} \cdot \sin w \cos w;$$

(12) $$H_1 = - \frac{1}{\cos w}\frac{\partial w}{\partial v}, \quad H_2 = \frac{1}{\sin w}\frac{\partial w}{\partial u}.$$

Aus den Formeln (7) bis (12) folgen die auf S. 61 aufgestellten ersten vier Sätze.

Wir betrachten jetzt also die durch $\operatorname{tg} \frac{w}{2} = e^{u_1 + v_1}$ charakterisierten pseudosphärischen Flächen; für diese ist:

(13) $$\begin{cases} \cos w = - \operatorname{tg} h (u_1 + v_1), \ \sin w = \frac{1}{\cos h (u_1 + v_1)}, \\ r_1 = - R \sin h (u_1 + v_1), \ r_2 = + R \cdot \frac{1}{\sin h (u_1 + v_1)}; \end{cases}$$

$$(14) \qquad \frac{dv_1}{dv} = -\frac{\cot\delta_1}{R},$$

wo δ_1 der Winkel der Ebene mit der Fläche ist (Gleichg. (14) folgt aus (9)); ferner

$$\sigma = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\sigma = 0;$$

$$(15) \qquad \frac{du_1}{du} = H_2 = \frac{1}{R_2} \text{ (folgt aus (12 und (7)).}$$

H_2 bedeutet die geodätische Krümmung der Krümmungslinien $u = \text{const.}$, R_2 den Radius der osculierenden Kugel; es ist also der Osculationsradius gleich dem Radius der geodätischen Krümmung der Krümmungslinien $u = \text{const.}$

Gleichung (11) geht unter Berücksichtigung der Gleichungen (13), (14), (15) über in:

$$(16) \qquad \cos h(u_1 + v_1) \cdot \left\{\frac{dH_2}{du} + \frac{1}{R}\frac{d}{dv}(\cot\delta_1)\right\} - \sin h(u_1 + v_1)\left\{H_2^2 - \frac{1 + \cot^2\delta_1}{R^2}\right\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung leitet man durch zweimalige Differentiation die für u_1 und v_1 bestehenden Differentialgleichungen ab, wir differenzieren zunächst nach u:

$$(17) \qquad \cos h(u_1 + v_1) \cdot \frac{d^2 H_2}{du^2} - \sin h(u_1 + v_1) 2 H_2 \frac{dH_2}{du} + \sin h(u_1 + v_1) \cdot H_2 \left(\frac{dH_2}{du} + \frac{1}{R}\frac{d}{dv}(\cot\delta_1)\right) - \cos h(u_1 + v_1) \cdot H_2 \left(H_2^2 - \frac{1 + \cot^2\delta_1}{R^2}\right) = 0.$$

Durch Differentiation von (17) nach u erhält man unter Berücksichtigung von (16) und (17) die Gleichung:

$$(18) \qquad H_2 \frac{d^3 H_2}{du^3} - \frac{dH_2}{du} \cdot \frac{d^2 H_2}{du^2} - 4 H_2^3 \frac{dH_2}{du} = 0;$$

$$(19) \qquad \frac{1}{H_2}\frac{d^2 H_2}{du^2} - 2 H_2^2 = 2 A_2,$$

$$\left(\frac{dH_2}{du}\right)^2 = H_2^4 + 2 A_2 H_2^2 + B_2;$$

$$(20) \qquad \frac{dH_2}{\sqrt{H_2^4 + 2 A_2 H_2^2 + B_2}} = du,$$

wo $A_2 B_2$ willkürliche Constante sind; H_2 ist also eine elliptische Funktion von u. Bezeichnen wir mit α_2, β_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $H_2^4 + 2 A_2 H_2^2 + B_2 = 0$, so können wir, um die Gleichung (20) auf die Normalform von Weierstrass zu bringen, setzen:

$$(21) \quad \begin{cases} H_2^2 = m_2^2 (s_2 - e_\lambda), \\ H_2^2 - \alpha_2 = m_2^2 (s_2 - e_\mu), \\ H_2^2 - \beta_2 = m_2^2 (s_2 - e_\nu), \end{cases}$$

wo m_2^2 eine noch willkürlich zu bestimmende positive oder negative Grösse ist.

$$(22) \quad \frac{dH_2}{\sqrt{H_2^4 + 2 A_2 H_2^2 + B_2}} = \frac{1}{m_2} \cdot \frac{ds_2}{\sqrt{4 (s_2 - e_\lambda)(s_2 - e_\mu)(s_2 - e_\nu)}} = du.$$

Es ist also:

$s_2 = \wp (m_2 (u + u_0))$, $e_\lambda e_\mu e_\nu$ gleich einem der Werte $e_1 e_2 e_3$, wo, wenn $e_1 e_2 e_3$ reell sind, $e_1 > e_2 > e_3$ sein soll.

Wir wollen jetzt u_1 als Funktion von u ausdrücken; da $H_2 = \frac{du_1}{du}$ ist, so wird

$$(22\text{a}) \quad du_1 = m_2 du \cdot \sqrt{s_2 - e_\lambda} = \frac{ds_2}{\sqrt{4 (s_2 - e_\mu)(s_2 - e_\nu)}}.$$

Setzen wir: $t = \sqrt{\frac{s_2 - e_\mu}{s_2 - e_\nu}}$, so wird:

$$dt = \frac{(e_\mu - e_\nu) \cdot ds_2}{(s_2 - e_\nu) \, 2 \sqrt{(s_2 - e_\mu)(s_2 - e_\nu)}},$$

$$t^2 - 1 = - \frac{e_\mu - e_\nu}{(s_2 - e_\nu)}, \quad du_1 = \frac{dt}{1 - t^2},$$

oder
$$- u_1 = \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{t - 1}{t + 1} + \text{const.},$$

wobei aber $e_\mu \lesseqgtr e_\nu$ vorausgesetzt ist.

Hierbei ist folgendes zu beachten: Da u und H_2 reell sein müssen, muss wegen $\frac{du_1}{du} = H_2$ auch u_1 reell sein. Ist nun $t > 1$, d. h. $e_\nu > e_\mu$, so ist $\log \text{nat} \frac{t-1}{t+1}$ reell und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Constante gleich 0

setzen, ist dagegen $t < 1$, $e_\mu > e_\nu$, so ist $\frac{t-1}{t+1} < 0$; um u_1 in reeller Form zu erhalten. müssen wir dann

$$\text{const.} = \log\text{nat}\,(-1)$$

setzen. In den folgenden Formeln ist $e_\nu > e_\mu$, also $t > 1$ vorausgesetzt.

$$(23) \quad \begin{cases} \sqrt{e_\nu - e_\mu} \cdot e^{-u_1} = \sqrt{s_2 - e_\mu} - \sqrt{s_2 - e_\nu}, \\ \sqrt{e_\nu - e_\mu} \cdot e^{+u_1} = \sqrt{s_2 - e_\mu} + \sqrt{s_2 - e_\nu}. \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} \sqrt{s_2 - e_\mu} = \sqrt{e_\nu - e_\mu} \cdot \cos h u_1, \\ \sqrt{s_2 - e_\nu} = \sqrt{e_\nu - e_\mu} \cdot \sin h u_1, \end{cases}$$

wo $s_2 = \wp\,[m_2(u + u_0)]$ ist.

Ferner wird:

$$(25) \quad H_2{}^2 = m_2{}^2(s_2 - e_\lambda) = m_2{}^2\{(e_\nu - e_\mu)\cos h^2 u_1 + (e_\mu - e_\lambda)\}$$
$$= A \cos h^2 u_1 + C,$$

wo also zur Abkürzung $m_2{}^2(e_\nu - e_\mu) = A$, $m_2{}^2(e_\mu - e_\lambda) = C$ gesetzt ist.

Führen wir den Wert von H_2 aus Gleichung (25) in Gleichung (16) ein, so erhalten wir $\cos\delta_1$ als Funktion von v_1 und zwar da $\frac{dH_2}{du} = A \cos h u_1 \sin h u_1$ ist, zerfällt Gleichung (16), wie eine leichte Rechnung lehrt, in zwei Gleichungen:

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{R}\frac{d\cot\delta_1}{dv} &= A \sin h v_1 \cos h v_1, \\ \frac{1 + \cot^2\delta_1}{R^2} &= C - A \sin h^2 v_1. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung (26) folgt durch Differentiation der zweiten nach v. Durch Elimination von v_1 aus (26) erhält man eine Gleichung zwischen δ_1 und v und zwar wird:

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{d\cot\delta_1}{dv}\right)^2 - \left(\frac{1+\cot^2\delta_1}{R^2} - C\right)\left(\frac{1+\cot^2\delta_1}{R^2} - C - A\right) = 0.$$

Setzt man $\alpha_1 = C - \frac{1}{R^2}$, $\beta_1 = C + A - \frac{1}{R^2}$, so wird:

$$(27) \quad \frac{1}{R}\frac{d\cot\delta_1}{\sqrt{\left(\frac{\cot^2\delta_1}{R^2} - \alpha_1\right)\cdot\left(\frac{\cot^2\delta_1}{R^2} - \beta_1\right)}} = dv.$$

Da diese Gleichung (27) der Gleichung (20) ganz analog ist, ferner $\frac{dv_1}{dv} = -\frac{1}{R}\cot\delta_1$ ist, so kann man für $\frac{\cot\delta_1}{R}$ ohne weiteres Formeln aufstellen, welche den Formeln (21) bis (25) analog sind, $e_\nu' > e_\mu'$ vorausgesetzt:

$$(28)\quad \begin{cases} \frac{1}{R^2}\cot^2\delta_1 = m_1^2(s_1 - e_\lambda'), \\ \frac{1}{R^2}\cot^2\delta_1 - \alpha_1 = m_1^2(s_1 - e_\mu'), \\ \frac{1}{R^2}\cot^2\delta_1 - \beta_1 = m_1^2(s_1 - e_\nu'). \end{cases}$$

$$(29)\quad \frac{1}{R}\frac{d\cot\delta_1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R^2}\cot^2\delta_1 - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{R^2}\cot^2\delta_1 - \beta_1\right)}}$$

$$= \frac{ds_1}{m_1\sqrt{4(s_1 - e_\lambda')(s_1 - e_\mu')(s_1 - e_\nu')}} = dv,$$

$$s_1 = \wp[m_1(v + v_0)].$$

$$(30)\quad \begin{cases} \sqrt{e_\nu' - e_\mu'}\;e^{+v_1} = \sqrt{s_1 - e_\mu'} - \sqrt{s_1 - e_\nu'}, \\ \sqrt{e_\nu' - e_\mu'}\cdot e^{-v_1} = \sqrt{s_1 - e_\mu'} + \sqrt{s_1 - e_\nu'}. \end{cases}$$

$$(31)\quad \begin{cases} \sqrt{s_1 - e_\mu'} = \sqrt{e_\nu' - e_\mu'}\cdot\cos h v_1, \\ \sqrt{s_1 - e_\nu'} = -\sqrt{e_\nu' - e_\mu'}\sin h v_1. \end{cases}$$

$$(32)\quad m_1^2(e_\mu' - e_\lambda') = \alpha_1 = C - \frac{1}{R^2},$$

$$m_1^2(e_\nu' - e_\lambda') = \beta_1 = A + C - \frac{1}{R^2},$$

$$m_1^2(e_\nu' - e_\mu') = \beta_1 - \alpha_1 = A.$$

$$(32\,a)\quad 3m_1^2 e_\lambda' = -A - 2C + \frac{2}{R^2},\; 3m_1^2 e_\mu' = -A + C - \frac{1}{R^2}$$

$$3m_1^2 e_\nu' = 2A + C - \frac{1}{R^2}.$$

Aus den Gleichungen (24) folgt unter Berücksichtigung von (25) und (21):

$$(33)\quad m_2^2(e_\mu - e_\lambda) = \alpha_2 = C,\; m_2^2(e_\nu - e_\lambda) = \beta_2 = A + C,$$
$$m_2^2(e_\nu - e_\mu) = \beta_2 - \alpha_2 = A.$$

$$(33\,a)\quad 3m_2^2\cdot e_\lambda = -A - 2C,\; 3m_2^2 e_\mu = -A + C,$$
$$3m_2^2 e_\nu = 2A + C.$$

Aus den letzten vier Gleichungen ergiebt sich:

$$(34)\quad \begin{cases} m_2^2(e_\nu - e_\mu) = (e_\nu' - e_\mu')\, m_1^2, \\ m_2^2(e_\nu - e_\lambda) = m_1^2(e_\nu' - e_\lambda') + \dfrac{1}{R^2}, \\ m_2^2(e_\mu - e_\lambda) = m_1^2(e_\mu' - e_\lambda') + \dfrac{1}{R^2}, \\ m_1^2 e_\lambda' = m_2^2 e_\lambda + \dfrac{2}{3R^2}, \quad m_1^2 e_\mu' = m_2^2 e_\mu - \dfrac{1}{3R^2}, \\ \qquad\qquad m_1^2 e_\nu' = m_2^2 e_\nu - \dfrac{1}{3R^2}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln kann man bereits den Übergang zu den Complementärflächen der Rotationsflächen machen; wir wollen jedoch zuvor die Formeln für die Cartesischen Koordinaten der Enneperschen Flächen ableiten. Wir können uns dabei sehr kurz fassen, indem wir auf Göttinger Nachrichten 1868, S. 258 f. verweisen.

Die Richtungscosinus der Normale der Ebenen der Krümmungslinien v sind $\cos l_1 \cos m_1 \cos n_1$. Nach Formeln (3), (6), S. 62 wird:

$$\begin{aligned} \cos l_1 &= \cos a \cos \delta_1 + \cos a'' \sin \delta_1, \\ \cos m_1 &= \cos b \cos \delta_1 + \cos b'' \sin \delta_1, \\ \cos n_1 &= \cos c \cos \delta_1 + \cos c'' \sin \delta_1. \end{aligned}$$

Durch Rechnung leitet man das Bestehen einer Gleichung von der Form:

$$\begin{vmatrix} \cos l_1, & \cos m_1, & \cos n_1 \\ \dfrac{d\cos l_1}{dv}, & \dfrac{d\cos m_1}{dv}, & \dfrac{d\cos n_1}{dv} \\ \dfrac{d^2\cos l_1}{dv^2}, & \dfrac{d^2\cos m_1}{dv^2}, & \dfrac{d^2\cos n_1}{dv^2} \end{vmatrix} = 0$$

ab, aus welcher

$$(35)\qquad \cos l_1 \cos \alpha_0 + \cos m_1 \cos \beta_0 + \cos n_1 \cos \gamma_0 = 0$$

folgt, ($\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ Constante), d. h. die Ebenen der Krümmungslinien v sind einer festen Richtung parallel.

Nimmt man diese Richtung parallel der Z-Axe und bezeichnet mit φ den Winkel, welchen die Ebene der Kurve v mit der X-Axe bildet, so wird

$$\cos\varphi = \cos m_1, \ \sin\varphi = -\cos l_1, \ \cos n_1 = 0,$$

mithin:

$$(36) \qquad \begin{cases} -\sin\varphi = \cos a \cos\delta_1 + \cos a'' \sin\delta_1, \\ \cos\varphi = \cos b \cos\delta_1 + \cos b'' \sin\delta_1, \\ 0 = \cos c \cos\delta_1 + \cos c'' \sin\delta_1. \end{cases}$$

Durch Differentiation nach v folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (6) bis (9), S. 11, 12:

$$(36\text{a}) \qquad \begin{cases} +\cos\varphi \dfrac{d\varphi}{dv} = (\cos a \sin\delta_1 - \cos a'' \cos\delta_1)\left(\dfrac{d\delta_1}{dv} + \dfrac{\cos w}{R}\right), \\ \qquad\qquad + \sin\delta_1 \dfrac{\partial w}{\partial u} \cos a', \\ \sin\varphi \dfrac{d\varphi}{dv} = (\cos b \sin\delta_1 - \cos b'' \cos\delta_1)\left(\dfrac{d\delta_1}{dv} + \dfrac{\cos w}{R}\right), \\ \qquad\qquad + \sin\delta_1 \dfrac{\partial w}{\partial u} \cos b', \\ 0 = (\cos c \sin\delta_1 - \cos c'' \cos\delta_1)\left(\dfrac{d\delta_1}{dv} + \dfrac{\cos w}{R}\right), \\ \qquad\qquad + \sin\delta_1 \dfrac{\partial w}{\partial u} \cos c'. \end{cases}$$

Durch Quadrieren und Addieren folgt aus diesen Gleichungen mit Hilfe von (13), (25), (26), S. 63, 66:

$$(37) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2 = \frac{C(C+A)}{R^2(C - A\sin h^2 v_1)^2} = R^2 C(C+A) \cdot \sin^4\delta_1 \cdot$$

Wegen der Gleichung (35) kann man

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = \Phi$$

schreiben, wo Φ allein Funktion von φ oder von v ist. Durch zweimalige Differentiation dieser Gleichung kann man für Φ die Differentialgleichung $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \Phi = 0$ aufstellen, welche integriert $\Phi = x_0 \sin\varphi - y_0 \cos\varphi$ giebt, die Ebenen gehen also alle durch eine feste Gerade; nimmt man dieselbe zur Z-Axe, so wird:

$$(38) \qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0.$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach v_1 findet man mit Hilfe von (37) und (36):

$$(39)\qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{\sin w\cdot\sin\delta_1}{\frac{d\varphi}{dv}}$$

$$= \frac{1}{R\cdot\sqrt{C^2+CA}\cdot\sin\delta_1\cdot\cos h\,(u_1+v_1)}.$$

z berechnet man aus der dritten Gleichung (36), es wird:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \sin w\cos c'' = -\sin w\cot\delta_1\cos c$$

$$= -\frac{\cot\delta_1}{\cos w}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Nach Formeln (37) und (38) berechnet man $\frac{\partial x}{\partial u}\;\frac{\partial y}{\partial u}\;\frac{\partial x}{\partial v}\;\frac{\partial y}{\partial v}$ und erhält schliesslich:

$$(40)\qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\cot\delta_1\cdot H_2}{R\sqrt{C^2+CA}\cdot\cos h^2\,(u_1+v_1)}.$$

$$(41)\qquad z = +\frac{H_2\operatorname{tg}h\,(u_1+v_1)}{R\sqrt{C(C+A)}} - U.$$

Zur Bestimmung von U dient die Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos w\cdot\cos c' = -\frac{\cos w}{\sin\delta_1}$$

$$\cdot(\sin\varphi\cos b + \cos\varphi\cos a) = (\text{nach } (36\text{a})$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\cos w\left(\frac{d\delta_1}{dv} + \frac{\cos w}{R}\right)\cdot\frac{1}{R\sqrt{C^2+CA}\cdot\sin^2\delta_1}.$$

Durch Vergleichung mit dem durch Differentiation von (41) nach u gewonnenen Ausdruck folgt:

$$U' = \frac{C + A\cos h^2 u_1}{\sqrt{C^2+CA}} = \frac{H_2^{\,2}}{\sqrt{C^2+CA}} = m_2^{\,2}\,(s_2 - e_\lambda)\cdot\frac{1}{\sqrt{C^2+CA}}.$$

$$(42)\qquad U = (du) = -\frac{m_2}{\sqrt{C^2+CA}}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}(m_2\,(u+u_0))\right.$$

$$\left. + e_\lambda\,(u+u_0)\,m_2 + \text{const.}\right).$$

$$(42\text{a})\qquad z = \frac{H_2\operatorname{tg}h\,(u_1+v_1)}{\sqrt{C(C+A)}} - \frac{1}{\sqrt{C(C+A)}}\int H_2^{\,2}\,du.$$

Die Gleichungen (38), (39), (42a) stellen die Cartesischen Koordinaten einer beliebigen Enneperschen Fläche dar.

Es erübrigt noch φ als Funktion von v auszudrücken; wir hatten (Gl. (28)):

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{C(C+A)} \frac{1}{m_1^2(s_1 - e_\mu') + C}.$$

Setzen wir

$$e_\mu' - \frac{C}{m_1^2} = \frac{1}{3m_1^2}\left(-A - 2C - \frac{1}{R^2}\right) = \wp w,$$

so wird

$$\wp' w = \frac{2i}{Rm_1^2} \sqrt{C(C+A)},$$

mithin:

$$\varphi = \frac{1}{2i}\int \frac{\wp' w dv}{s_1 - \wp w} = -\frac{1}{2i}\int dv \left\{\frac{\sigma'}{\sigma}(m_1(v+v_0)+w)\right.$$
$$\left. - \frac{\sigma'}{\sigma}(m_1(v+v_0)-w) - \frac{2\sigma'}{\sigma} w\right\}.$$

(43) $$e^{2im\varphi} = e^{\frac{2\sigma'}{\sigma} w \cdot m_1 v} \cdot \frac{\sigma(m_1(v+v_0)-w)}{\sigma(m_1(v+v_0)+w)}.$$

(44) $$\wp(m(v+v_0)) - \wp w = \frac{1}{\sin^2 \delta_1}.$$

Auf die explicite Darstellung der Grössen xyz in Funktionen von u und v soll nicht weiter eingegangen werden. Vielmehr soll jetzt aus diesen allgemeinen Formeln der Übergang zu den Complementärflächen der Rotationsflächen gemacht werden; dabei sei $R = 1$ gesetzt.

Die Gleichungen (21), S. 65, gelten allgemein für die Enneperschen Flächen. Bestimmt man in diesen Formeln die willkürliche Grösse $m_2^2 = -1$ und setzt $H_2^2 = \cos^2 w$, wo w eine Funktion von u ist, — zwei Substitutionen, welche ja ganz allgemein gestattet sind und welche wegen der Formeln (34), S. 19, resp. a., S. 25 und (15), S. 64 ausgeführt sind — so ist, um Übereinstimmung der Formeln (21), S. 65, mit den Formeln (34), S. 19, resp. (10), S. 46, herbeizuführen, d. h. um aus den allgemeinen Enneperschen die Complementärflächen der Rotationsflächen abzuleiten, notwendig und hinreichend, dass eine der Wurzeln $\alpha_2 \beta_2$ den Wert $+1$ annimmt, dass also entweder $C = 1$ oder $C + A = 1$ wird. Ist $C + A = 1$, so wird $e_\lambda' = e_\nu'$, wir erhalten, $e_\nu > e_\mu$ oder $A < 0$ vorausgesetzt[1]), die Complementärfläche der Rotationsfläche vom elliptischen

1) Hätten wir $e_\mu > e_\nu$ angenommen, so hätten wir für $C + A = 1$ die Complementärfläche der Rotationsfläche vom hyperbolischen, für $C = 1$ die der Rotationsfläche vom elliptischen Typus erhalten.

Typus; ist $C = 1$, so wird $e_\lambda' = e_\mu'$, wir erhalten die andere Complementärfläche; ist ausser einer dieser Bedingungen noch $A = 0$ oder $e_\nu' = e_\mu'$, $e_\nu = e_\mu$, so wird durch diese Specialisierungen die Complementärfläche der Pseudosphäre bestimmt. Die elliptischen Funktionen von v reducieren sich also immer auf Exponentialfunktionen, im Grenzfalle $C = 1$, $A = 0$ ausserdem auch noch die elliptischen Funktionen von u.

Wir wollen jetzt die Grenzübergänge ausführen:

I. $A + C = 1$, $e_\lambda' = e_\nu'$, $A < 0$, $A = -c_1$, $e_\lambda > e_\nu$,

$$e_\lambda = e_1, \; e_\mu = e_3, \; e_\nu = e_2,$$

$$e_1 - e_2 = 1, \; e_1 - e_3 = c_1 + 1, \; e_2 - e_3 = c_1, \; \alpha_2 = c_1 + 1, \; \beta_2 = 1,$$

$$H_2^2 = -(s_2 - e_\lambda) = -(s_2 - e_1) = \cos^2 w,$$

$$H_2^2 - \beta_2 = -(s_2 - e_\nu) = -(s_2 - e_2) = -\sin^2 w,$$

$$H_2^2 - \alpha_2 = -(s_2 - e_\mu) = -(s_2 - e_3) = -(\sin^2 w + c_1);$$

ferner wird nach (23), (24), S. 66:

$$e^{+u_1} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} + \sin w\right),$$

$$e^{-u_1} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\left(\sqrt{\sin^2 w + c_1} - \sin w\right),$$

$$\cos h u_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \sqrt{\sin^2 w + c_1}, \quad \sin h u_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \sin w.$$

Da $\alpha_1 = + c_1$, $\beta_1 = 0$ wird, folgt aus (29):

$$\int \frac{d \cot \delta_1}{\cot \delta_1 \sqrt{\cot^2 \delta_1 - c_1}} = v + v_0,$$

$$\cot \delta_1 = + \frac{\sqrt{c_1}}{\sin(\sqrt{c_1}\, v)}, \text{ wo } v_0 = -\frac{\pi}{\sqrt{c_1}} \text{ bestimmt ist}$$

(vgl. Winkel μ, S. 27).

Aus $\frac{d v_1}{d v} = -\cot \delta_1$ folgt mit Hilfe der vorigen Gleichung:

$$e^{-v_1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{c_1}\, v}{2}\right), \quad e^{+v_1} = \cot\left(\frac{\sqrt{c_1}\, v}{2}\right),$$

$$\cos h v_1 = \frac{1}{\sin(\sqrt{c_1}\, v)}, \quad \sin h v_1 = \cot(\sqrt{c_1}\, v).$$

Nach (37) wird:

$$\frac{d\varphi}{dv} = \sqrt{c_1+1}\,\sin^2\delta_1 = \sqrt{c_1+1}\cdot\frac{\sin^2(\sqrt{c_1}\,v)}{\sin^2(\sqrt{c_1}\,v)+c_1}.$$

Durch Vergleichung mit Formel β. S. 22, sehen wir, dass dieser Gleichung genügt wird durch:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(\sqrt{c_1}\,v)+c_1}}\Big(\sqrt{c_1}\cos(\sqrt{c_1+1}\,v)\cos(\sqrt{c_1}\,v) + \sqrt{c_1+1}\sin(\sqrt{c_1+1}\,v)\sin\sqrt{c_1}\,v\Big)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{\sin^2\sqrt{c_1}\,v+c_1}}\Big(-\sqrt{c_1}\sin(\sqrt{c_1+1}\,v)\cos(\sqrt{c_1}\,v) + \sqrt{c_1+1}\cos(\sqrt{c_1+1}\,v)\sin\sqrt{c_1}\,v\Big).$$

Für xyz erhält man endlich die Werte:

$$x = -\frac{Rc_1V_1}{\sqrt{\sin^2 w+c_1}+\sin w\cos v_1},\quad y = \frac{Rc_1V_2}{\sqrt{\sin^2 w+c_1}+\sin w\cos v_1},$$

$$z = \frac{\cos w}{\sqrt{c_1+1}}\,\frac{\sqrt{\sin^2 w+c_1}\cdot\cos v_1+\sin w}{\sqrt{\sin^2 w+c_1}+\sin w\cos v_1} - \frac{1}{\sqrt{c_1+1}}\int\cos^2 w\,du,$$

wo $v_1 = \sqrt{c_1}\,.\,v$ und $V_1\,V_2$ die Bedeutung der Gleichungen auf S. 17 haben.

II. $C=1,\quad e_\lambda' = e_\mu',\quad A<0,\quad A=-c,\quad c>0,$

$$e_\lambda = e_1,\quad e_\nu = e_2,\quad e_\mu = e_3,$$

$e_\lambda - e_\nu = 1-c$ ist jedoch nur dann >0, wenn $c<1$ ist.

$$e_1-e_2 = 1-c,\quad e_1-e_3=1,\quad e_2-e_3=c,\quad \alpha_2=1,\quad \beta_2=1-c,$$

$$H_2^2 = -(s_2-e_\lambda) = -(s_2-e_1) = \cos^2 w,$$

$$H_2^2-\beta_2 = -(s_2-e_\nu) = -(s_2-e_2) = -(\sin^2 w-c),$$

$$H_2^2-\alpha_2 = -(s_2-e_\mu) = -(s_2-e_3) = -\sin^2 w,$$

$$e^{+u_1} = \frac{1}{\sqrt{c}}(\sqrt{\sin^2 w-c}+\sin w),\quad e^{-u_1} = -\frac{1}{\sqrt{c}}(\sqrt{\sin^2 w-c}-\sin w),$$

$$\cos h u_1 = \frac{1}{\sqrt{c}}\sin w,\qquad \sin h u_1 = \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{\sin^2 w-c},$$

$$\alpha_1=0,\quad \beta_1=-c,\quad \int\frac{d\cot\delta_1}{\cot\delta_1\sqrt{\cot^2\delta+c}} = (v+v_0),$$

$$\cot\delta_1 = +\frac{\sqrt{c}}{\sin h(\sqrt{c}\,v)}\quad \text{(vgl. Winkel } \mu \text{ S. 50)},$$

$$e^{-v_1} = \operatorname{tg} h\left(\frac{\sqrt{c}v}{2}\right), \qquad e^{+v_1} = \cot h\left(\frac{\sqrt{c}v}{2}\right),$$

$$\cos h v_1 = \cot h(\sqrt{c}v), \qquad \sin h v_1 = \frac{1}{\sin h(\sqrt{c}v)},$$

$$\frac{d\varphi}{dv} = \sqrt{1-c} \cdot \frac{\sin h^2 \sqrt{c}v}{\sin h^2 \sqrt{c}v + c} \qquad \text{(S. 50 Formel g.)},$$

$$x = \frac{RcV_1}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h\sqrt{c}v},$$

$$y = \frac{RcV_2}{\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h\sqrt{c}v},$$

$$z = \frac{\cos w\left(\sqrt{\sin^2 w - c}\cos h\sqrt{c}v + \sin w\right)}{\sqrt{1-c}\left(\sqrt{\sin^2 w - c} + \sin w \cos h\sqrt{c}v\right)} - \int \cos^2 w\, du,$$

wo jetzt:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{1-c}}\cos\left(\sqrt{1-c}\,v\right)\cos h\sqrt{c}v + \frac{1}{\sqrt{c}}\sin\sqrt{1-c}\,v \cdot \sin h\sqrt{c}v,$$

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{1-c}}\sin\left(\sqrt{1-c}\,v\right)\cos h\sqrt{c}v - \frac{1}{\sqrt{c}}\cos\sqrt{1-c}\,v \cdot \sin h\sqrt{c}v$$

ist.

III.[1]) $C = 1,\ A = 0,\ \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 0,$

$$\cot\delta_1 = -\frac{1}{v}, \qquad 1 + \cot^2\delta_1 = \frac{1}{\sin^2\delta_1} = \frac{v^2+1}{v^2}, \qquad e^{v_1} = v,$$

---

1) Wird $A = 0$, aber $C \gtrless 1$, so erhalten wir eine pseudosphärische Fläche, deren Gleichungen keine elliptischen Funktionen enthalten, dieselben lauten:

$$x = \frac{\cos\varphi}{C\sin\delta_1} \cdot \frac{1}{\cos h(u_1+v_1)}, \qquad y = \frac{\sin\varphi}{C\sin\delta_1} \cdot \frac{1}{\cos h(u_1+v_1)},$$

$$z = \int \frac{C\,du}{\sin h^2\sqrt{C}u} + Cu - \sqrt{C}\cot h\sqrt{C}u \cdot \frac{\sin h^2\sqrt{C-1}\,v - \sin h^2\sqrt{C}u}{\sin h^2\sqrt{C-1}\,v + \sin h^2\sqrt{C}u},$$

wo:

$$\cos h(u_1+v_1) = \frac{\sin h^2\sqrt{C}u + \sin h^2\sqrt{C-1}\,v}{2\sin h\sqrt{C}u \cdot \sin h\sqrt{C-1}\,v},$$

$$\cot\delta_1 = -\sqrt{C-1}\cot h\sqrt{C-1}\,v, \qquad H_2 = -\sqrt{C}\cot h\sqrt{C}u,$$

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{C\sin h^2\sqrt{C-1}\,v}{C-1+C\sin h^2\left(\overline{C-1}\,v\right)}$$

ist.

$$e^{-v_1} = \frac{1}{v}, \qquad \cos h v_1 = \frac{1}{2}\frac{v^2+1}{v}, \qquad \sin h v_1 = \frac{1}{2}\frac{v^2-1}{v}.$$

Aus (22a) folgt:

$$s_2 - e_\mu = e^{2u_1}, \qquad H_2^2 = 1 - e^{2u_1}, \qquad du = \frac{du_1\, e^{u_1}}{e^{u_1}\sqrt{1-e^{2u_1}}},$$

$$e^{+u_1} = \frac{1}{\cos hu}, \quad e^{-u_1} = \cos hu, \quad \cos hu_1 = \frac{1}{2\cos hu}(\cos h^2 u + 1),$$

$$\sin hu_1 = -\frac{1}{2\cos hu}(\cos h^2 u - 1), \quad H_2 = \pm \operatorname{tg} hu, \quad \frac{d\varphi}{dv} = \frac{v^2}{v^2+1},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}}(\cos v - v\sin v), \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}}(\sin v + v\cos v),$$

$$x = \frac{2\cos hu}{\cos h^2 u + v^2}(\cos v - v\sin v), \qquad y = \frac{2\cos hu}{\cos h^2 u + v^2}(\sin v + v\cos v),$$

$$z = -u + \frac{2\sin hu \cos hu}{\cos h^2 u + v^2}.$$

Anhang.

Es sei an dieser Stelle noch eine Erweiterung der vorliegenden Arbeit kurz angedeutet; dabei sollen ohne nähere Ausführungen nur die Ergebnisse angegeben werden.

Wir betrachten einerseits den zweiten Brennflächenmantel eines pseudosphärischen Strahlensystems, dessen erster Mantel eine Rotationsfläche ist, die sogenannte „Bäcklundsche Transformierte [1]) einer Rotationsfläche“.

Die Gleichungen derselben lauten nach S. 15, Form. (22), $R = 1$ gesetzt:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos\sigma\,\dfrac{\partial w_1}{\partial u} = \sin w_1 \cos w + \sin\sigma \cos w_1 \sin w, \\ \cos\sigma\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial v} + \sqrt{\sin^2 w - c}\right) = -\cos w_1 \sin w - \sin\sigma \sin w_1 \cos w. \end{cases}$$

Wir betrachten andererseits die Enneperschen pseudosphärischen Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien [2]).

1) Bianchi, Diff.-Geom. S. 455.

2) Göttinger Nachrichten 1868; daselbst sind die Rechnungen nur unter Annahme von positivem constantem Krümmungsmass durchgeführt,

Sind R_2 der Osculationsradius, τ der Winkel, unter welchem die Kugel die Fläche schneidet, so folgt aus Gleichung (7), S. 63, wenn man $\varkappa_1 = \operatorname{cotg} \tau$, $\varkappa_2 = \frac{1}{R_2 \sin \tau}$ setzt, für die Enneperschen pseudosphärischen Flächen die Gleichung:

$$(2) \qquad \frac{\partial w_1}{\partial u} = \varkappa_2 \sin w_1 + \varkappa_1 \cos w_1 .$$

Aus der allgemein für pseudosphärische Flächen geltenden Gleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial v} = \sin w \cos w$ folgt durch Integration:

$$(3) \quad \left(\frac{\partial w_1}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{2}(\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2 + 1) \cos 2 w_1 + \varkappa_1 \varkappa_2 \sin 2 w_1 \\ - 2 \cos w_1 \frac{d\varkappa_2}{du} + 2 \sin w_1 \frac{d\varkappa_1}{du} + U.$$

Bildet man aus (2) und (3) die Grösse $2 \frac{\partial w_1}{\partial v} \frac{\partial^2 w_1}{\partial u \partial v}$, so folgt durch Vergleichung der beiden Werte:

$$(4) \qquad 2U + 3(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) - h = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\varkappa_1''}{\varkappa_1} - \frac{1}{2} = \frac{\varkappa_2''}{\varkappa_2} + \frac{1}{2} = 2(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2) - \frac{h}{2},$$

wo h eine willkürliche Constante ist.

Setzen wir $\varkappa_1 = \operatorname{tg} \sigma \sin w$, $\varkappa_2 = \frac{\cos w}{\cos \sigma}$, so wird Gleichung (5) identisch befriedigt, wenn $c + 1 + \frac{h-1}{2} - \frac{2}{\cos^2 \sigma} = 0$ ist und die Gleichungen (2) und (3) gehen in (1) über. Daraus folgt: Die Bäcklund'schen Transformierten einer Rotationsfläche gehören zu den Enneperschen Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien.

Umgekehrt lässt sich der Satz beweisen: Wenn $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ durch elliptische Funktionen von u dargestellt werden sollen, oder wenn — was auf dasselbe hinauskommt — zwischen $\varkappa_1^2$ und $\varkappa_2^2$ eine lineare Beziehung besteht, so lässt sich die zugehörige pseudosphärische Fläche stets als die Bäcklundsche Transformierte einer Rotationsfläche auffassen.

---

doch lassen sich auf dem von Enneper gezeigten Wege dieselben Untersuchungen unter Annahme von negativem Krümmungsmass sehr leicht anstellen.

Ist nämlich die lineare Beziehung von der Form

$$\alpha\pi_1^2 + \beta\pi_2^2 = 1,$$

so folgt aus dieser und Gleichung (5) $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = 1$ und man kann ganz allgemein $\pi_1 = \operatorname{tg}\sigma \sin w$, $\pi_2 = \frac{\cos w}{\cos\sigma}$ setzen, die allgemeinen Gleichungen (2), (3) reducieren sich bei geeigneter Bestimmung von c und σ auf 1 und diese Gleichungen sind ganz allgemein integrierbar, während Enneper das allgemeine Integral der Gleichung (2) nur mit Hilfe einer particulären Lösung angiebt.

Die allgemeine Lösung derselben lässt sich schreiben:

$$e^{w_1 i} = -\frac{\sin w + i\sin\sigma\cos w}{\cos\sigma\sqrt{\sin^2 w + \operatorname{tg}^2\sigma}} \cdot \frac{\cos(v_1 + i_2 - i_1)}{\cos(v_1 + i_2 + i_1)},$$

wo

$$v_1 = \frac{i}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\sigma + c} \cdot v,$$

$$\cos 2i_1 = \frac{\sqrt{\sin^2 w - c}}{\sqrt{\sin^2 w + \operatorname{tg}^2\sigma}}, \qquad \sin 2i_1 = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\sigma + c}}{\sqrt{\sin^2 w + \operatorname{tg}^2\sigma}},$$

$$i_2 = -\frac{i}{2}\sin\sigma\sqrt{\operatorname{tg}^2\sigma + c}\int\frac{du}{\sin^2 w\cos^2\sigma + \sin^2\sigma}$$

ist.

Wird $\sigma = 0$, so erhalten wir die Formeln für die Complementärflächen der Rotationsflächen, wird $\operatorname{tg}^2\sigma + c = 0$, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\frac{w_1}{2} = \frac{C - \varphi}{1 + C\varphi}$$

wo

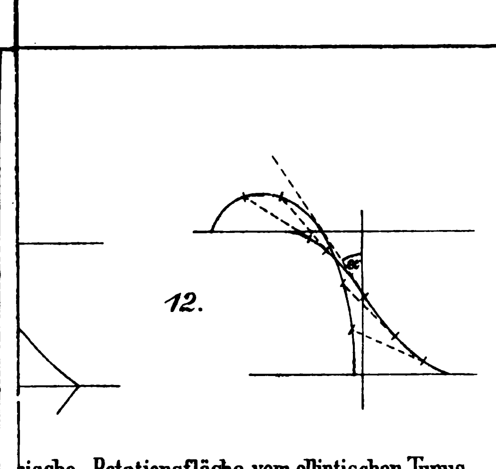
$$C = \frac{\sqrt{\sin^2 w + c_1} - \sqrt{c_1 + 1}\sin w}{\sqrt{c_1}\cos w}, \qquad \varphi = (v + u_2)\sqrt{\sin^2 w + c_1},$$

$$u_2 = -\sqrt{c_1(c_1 + 1)}\int\frac{du}{\sin^2 w + c_1}, \qquad c_1 = -c$$

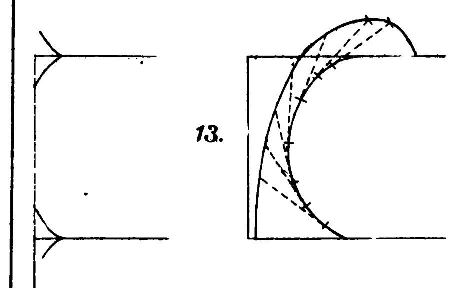
ist.

Für $c = 0$ erhalten wir die Bäcklundschen Transformierten der Pseudosphäre; die Gleichungen zeichnen sich dadurch aus, dass keine elliptischen Funktionen auftreten. Auf diese speciellen Fälle sowie auch auf die allgemeinen Gleichungen soll nicht weiter eingegangen werden. Ebenso sollen auch die folgenden beiden Fragen nicht weiter erörtert werden, ob die

allgemeine Lösung der Gleichung (2), welche Enneper (Gött. Nachr. 1868) unter Annahme einer particulären Lösung angegeben hat, unter der Annahme der in diesem Abschnitt enthaltenen particulären Lösung etwa zur Diskussion bequemere Formen annimmt, und zweitens ob die Anwendung des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes, nach welchem, wenn die Bäcklundschen Transformierten einer gegebenen Fläche gefunden sind, die fortgesetzte Anwendung der Bäcklundschen Transformation nur algebraische Rechnungen und Differentiationen erfordert, für die Theorie der pseudosphärischen Flächen interessante Ergebnisse liefert.



ische Rotationsfläche vom elliptischen Typus
ction der Kurve $v_1 = 0, \pi$, $(c_1 = \frac{1}{3}$, d.h. $\alpha = 30^\circ)$.



ische Rotationsfläche von hyperbolischen Typus
Konstruktion der Kurve $v_1 = 0$.

Lith u. Druck v. Eschebach & Schaefer in Leipzig.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Georg Bolke, evangelischer Confession, am 15. September 1877 in Marienthron, Kreis Neustettin in Pommern, als Sohn des verstorbenen königl. Oberamtmanns Friedrich Bolke. Nachdem ich meinen ersten Unterricht privatim empfangen hatte, trat ich Ostern 1888 in die Quinta des königl. Fürstin-Hedwig-Gymnasiums zu Neustettin ein, welches ich Ostern 1896 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Ich widmete mich dem Studium der Mathematik, der Physik und Erdkunde und besuchte nach einander die Universitäten Halle zwei, Tübingen ein, Berlin drei, und Halle vier Semester, von denen ich während der letzten beiden verlängertes Bürgerrecht besass. Allen meinen verehrten Lehrern, den Herren Cantor, Dorn, Grassmann, Gutzmer, Kirchhoff, Ule, Wangerin in Halle, v. Brill, Maurer, Vöchting in Tübingen, Blasius, Fuchs, Hensel, Knoblauch, Paulsen, Planck, H. A. Schwarz, Warburg in Berlin, vor allem den Herren v. Brill, Schwarz, Wangerin spreche ich hiermit meinen Dank aus.

Thesen.

I.

Bei Anwendungen von elliptischen Funktionen verdienen die von Weierstrass eingeführten Funktionen den Vorzug.

II.

Es wäre wünschenswert, dass in der Flächentheorie eine einheitliche, von allen Mathematikern anzunehmende Bezeichnungsweise eingeführt würde.

III.

Gleichartige ethnographische Eigentümlichkeiten bei weit von einander entfernt wohnenden Völkern sind in der Regel auf gemeinsamen Ursprung zurückzuführen und oft Reste eines früher grösseren Verbreitungsbezirkes.

IV.

Südamerika ist als selbständiger Erdteil aufzufassen.



